On a generalized version of the conjecture (H)

Abdelhadi ZAIM

ICATIR 2023
In honor of Professor **Mohamed Rachid Hilali**
Faculté des Sciences de Meknès

18/03/2023

UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA
FACULTÉ DES SCIENCES AÏN CHOCK

Plan

- Présentation du problème
  - Version topologique de la conjecture (RRH)
  - Version algébrique de la conjecture (RRH)
- Résultats trouvés
- Questions

Version topologique de la conjecture (RRH)

Présentation du problème

Définition

Un espace topologique simplement connexe est dit elliptique si

$$\dim\,(\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q})<\infty \text{ et } \dim\,H^*(X;\mathbb{Q})<\infty.$$

Le calcul des groupes de cohomologie et d'homotopie est un sujet de recherche très actif. À l'heure actuelle, il reste ecore un probléme ouvert.

Les fibrations sont des objets fondamentaux dans nombreux domaines des mathématiques: géométrie algébrique, topologie algébrique, physique théorique, etc. Elles parviennent à donner des réponses sur les groupes d'homotopie.

Définition

Une fibration est une application continue $p : E \to B$ vérifiant la propriété de relèvement des homotopies:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "G"'] & B \end{tikzcd}$$

Cela signifie que pour tout espace topologique X, pour toute application $F : X \times I \to B$ telle que $p \circ f = F \circ i$, il existe une application G: $X \times I \to E$ faisant commuter le diagramme précédent.

Présentation du problème

La résolution de la conjecture de Hilali est parmis les questions ouvertes qui figurent dans la théorie de l'homotopie rationnelle. Elle s'énonce comme suit:

Conjecture (H)

Soit X un espace topologique simplement connexe elliptique, alors

$$\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \leq \dim H^*(X;\mathbb{Q}) \quad \text{(en tant qu'evg)}$$

M.R. Hilali
Action du tore $\mathbb{T}^n$ sur les espaces simplement connexes.
PhD thesis, Université catholique de Louvain, 1980.

Présentation du problème

Notons ici

$$\ker\ (\pi_*(p)\otimes\mathbb{Q}) = \oplus_{i\geq 2}\ker\ (\pi_i(p)\otimes\mathbb{Q} : \pi_i(E)\otimes\mathbb{Q}\to\pi_i(B)\otimes\mathbb{Q})$$

Et aussi

$$\ker\ H_*(p;\mathbb{Q}) = \oplus_{i\geq 0}\ker\ (H_i(p;\mathbb{Q}) : H_i(E;\mathbb{Q}) \to H_i(B;\mathbb{Q})).$$

Conjecture (RH)

Soit $F\overset{j}{\to}E\overset{p}{\to}B$ une fibration d'espaces topologiques simplement connexes elliptiques, alors

$$\dim\ \ker\ \pi_*\,(p) \leq \dim\ \ker\ H_*\,(p) + 1.$$

T. Yamaguchi and S. Yokura
On a Relative Hilali Conjecture.
Afr. Diaspora J. Math. (N.S.) **21**, *no. 1, 81-86, 2018.*

Relaxed relative Hilali conjecture

Conjecture (RRH)

Soit $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ une fibration d'espaces topologiques simplement connexes elliptiques, alors

$$\dim \ker \pi_*(j) + \dim \ker \pi_*(p) \leq \dim \ker H_*(j) + \dim \ker H_*(p) + 1.$$

A. Zaim
Generalized relative Hilali conjecture.
Journal of Mathematics and Computer Science, 29 (2023), no. 4, 399-406.

Cas particuliers

Dans le cas où $B \simeq_{\mathbb{Q}} \{*\}$, on aura:

- $\ker \pi_*(p) \cong \pi_*(E)$ et $\ker H_*(p) + 1 \cong H_*(E)$ et
- $\ker \pi_*(j) \cong \ker H_*(j) = 0$.

Cas particuliers

Dans le cas où $B \simeq_{\mathbb{Q}} \{*\}$, on aura:

- $\ker \pi_* (p) \cong \pi_* (E)$ et $\ker H_* (p) + 1 \cong H_* (E)$ et
- $\ker \pi_* (j) \cong \ker H_* (j) = 0.$

Dans le cas où $\ker \pi_* (j) = \ker H_* (j)$, alors on retrouve la conjecture (RH).

Exemple

On considère la fibration

$$\xi : \mathbb{C}P^{n-1} \xrightarrow{j} \mathbb{C}P^{2n-1} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^{2n} \text{ pour } n \geq 2$$

On sait bien que

$$\pi_i\left(\mathbb{S}^{2n}\right) \cong \mathbb{Q} \text{ pour } i = 2n, 4n-1, \text{ et } \pi_i\left(\mathbb{C}P^n\right) \cong \mathbb{Q} \text{ pour } i = 2 \text{ et } 2n+1.$$

En utilisant la suite exacte longue associée à ξ, on en déduit que

$$\dim \ker \pi_*(p) = \dim \ker \pi_*(j; \mathbb{Q}) = 1.$$

D'autre part, nous avons

$$\dim \ker H_*(p; \mathbb{Q}) = 2n-1 \text{ et } \dim \ker H_*(j; \mathbb{Q}) = 0.$$

D'où ξ vérifie la conjecture (RRH).

Version algébrique de la conjecture (RRH)

Modèle minimal de Sullivan d'un espace topologique

La relation entre la topologie et l'algèbre est donnée par les foncteurs A_{PL} et la réalisation géométrique de Sullivan $|.|$. Le foncteur A_{PL} de Sullivan

$$A_{PL} : Top \to ADGC$$

est inspiré des formes différentielles C^∞ sur une variété. Il existe un isomorphisme naturel d'algèbres

$$H(A_{PL}(X)) \cong H^*(X; \mathbb{Q})$$

Définition

Un modèle minimal de Sullivan pour un espace topologique X est une algèbre de Sullivan minimale $(\Lambda V, d)$ munie d'un quasi-isomorphisme

$$\varphi : (\Lambda V, d) \to A_{PL}(X).$$

Exemples

- Le modèle minimal de Sullivan de la sphère $\mathbb{S}^{2n+1}$ est:

$$(\Lambda(y), 0) \to A_{PL}\left(\mathbb{S}^{2n+1}\right)$$

avec $|y| = 2n+1$.

- Le modèle minimal de Sullivan de la sphère $\mathbb{S}^{2n}$ est:

$$(\Lambda(x, y), d) \to A_{PL}\left(\mathbb{S}^{2n}\right)$$

avec $|x| = 2n$ et $|y| = 4n-1$. La différentielle est donnée par $dx = 0$ et $dy = x^2$.

KS-modèle d'une fibration

Soit $F \overset{j}{\to} E \overset{p}{\to} B$ une fibration d'espaces topologiques simplement connexes, alors son KS-modèle est donné par la suite exacte suivante:

$$(\Lambda W, d_W) \overset{J}{\to} (\Lambda W \otimes \Lambda V, D) \overset{P}{\to} (\Lambda V, d_V)$$

où $(\Lambda W, d_W)$ est le modèle minimal de B et $(\Lambda V, d_V)$ est le modèle minimal de F.
La différentielle D est définie par $D(w) = d_W(w)$ pour $w \in W$ et $D(v) - d_V(v) \in \Lambda^+ W.(\Lambda W \otimes \Lambda V)$ pour $v \in V$. En général la différentielle D n'est pas minimale.

On identifié la conjecture (RRH) en termes de Sullivan minimal modèles. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
Hom(\pi_*(E),\mathbb{Q}) & \xrightarrow{Hom(\pi_*(j),\mathbb{Q})} & Hom(\pi_*(F),\mathbb{Q}) \\
\| & & \| \\
H^*(W\oplus V, D_1) & \xrightarrow{H^*(P,D_1)} & V
\end{array}$$

Compte tenu de ce dernier:

$$\mathrm{Hom}(\ker \pi_*(j),\mathbb{Q}) \cong \mathrm{coker}\ H^*(P,D_1)$$

Et par suite

$$\dim \ker \pi_*(j) = \dim \mathrm{coker}\ H^*(P,D_1) \quad (1)$$

D'autre part, on a

$$
\begin{array}{ccc}
Hom(H_*(E),\mathbb{Q}) & \xrightarrow{Hom(H_*(j),\mathbb{Q})} & Hom(H_*(F),\mathbb{Q}) \\
\| & & \| \\
H^*(\Lambda W \otimes \Lambda V, D) & \xrightarrow{H^*(j)} & H^*(\Lambda V, d_V)
\end{array}
$$

Et donc

$$\dim \ker H_*(j) = \dim \operatorname{coker} H^*(P) \quad (2)$$

Version algébrique de la conjecture (RRH)

En combinant (1) et (2), la conjecture (RRH) peut se traduire algébriquement comme suit:

Conjecture (RRH)

Si $(\Lambda W, d_W) \xrightarrow{J} (\Lambda W \otimes \Lambda V, D) \xrightarrow{P} (\Lambda V, d_V)$ est un KS-modèle d'une fibration, donc

$$\dim \operatorname{coker} H^*(J, D_1) + \dim \operatorname{coker} H^*(P, D_1) \leq \dim \operatorname{coker} H^*(J) + 1 + \dim \operatorname{coker} H^*(P).$$

Résultats trouvés

Fibration de base un espace homogène

Nous présentons ici nos résultats répondant à la conjecture (RRH).

Théorème

Soit G un groupe de Lie connexe et H un sous-groupe fermé de G tel que rank G = rank H, alors

$$H \hookrightarrow G \xrightarrow{p} G \diagup H$$

vérifie la conjecture (RRH).

A. Zaim
Generalized relative Hilali conjecture.
Journal of Mathematics and Computer Science, 29 (2023), no. 4, 399-406.

Fibration TNCZ

Une fibration $\xi : F \stackrel{j}{\to} E \stackrel{p}{\to} B$ est dite totalement non cohomologue à zéro (TNCZ) si l'homomorphisme $H^*(j) : H^*(E) \to H^*(F)$ est surjectif.

Fibration TNCZ

Une fibration $\xi : F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ est dite totalement non cohomologue à zéro (TNCZ) si l'homomorphisme $H^*(j) : H^*(E) \to H^*(F)$ est surjectif.

Théorème

Soit $\xi : F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ une fibration TNCZ dont la fibre F vérifie la conjecture (H), alors ξ satisfait la conjecture (RRH).

Fibration TNCZ

Une fibration $\xi : F \overset{j}{\to} E \overset{p}{\to} B$ est dite totalement non cohomologue à zéro (TNCZ) si l'homomorphisme $H^*(j) : H^*(E) \to H^*(F)$ est surjectif.

Théorème

Soit $\xi : F \overset{j}{\to} E \overset{p}{\to} B$ une fibration TNCZ dont la fibre F vérifie la conjecture (H), alors ξ satisfait la conjecture (RRH).

Corollaire

Etant donné une fibration $\xi : F \overset{j}{\to} E \overset{p}{\to} B$ telles que:

- F est un F-space
- dim $\pi_{impair}(F) \leq 3$

alors la conjecture (RRH) est vraie.

Fibration d'espace total un F_0-espace

Définition

Un F_0-espace est un espace topologique elliptique dont la cohomologie rationnelle est concentrée en degrés pairs.

Théorème

Toute fibration $F \simeq \prod_{i=1}^{r} \mathbb{S}^{2n_i+1} \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B \simeq \prod_{k=1}^{r} K(\mathbb{Q}, 2m_k)$ vérifie la conjecture (RRH).

Questions

Questions

Nous présentons quelques questions liées à la conjecture (RRH).

Question 1

Soit $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ une fibration d'espaces simplement connexes. Est-il possible de vérifier que $\dim H_*(F) \leq \dim \ker H_*(j) + \dim \ker H_*(p) + 1$?

Questions

Nous présentons quelques questions liées à la conjecture (RRH).

Question 1

Soit $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ une fibration d'espaces simplement connexes. Est-il possible de vérifier que $\dim H_*(F) \leq \dim \ker H_*(j) + \dim \ker H_*(p) + 1$?

Question 2

Caractériser les fibrations $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ satisfaisant $\ker \pi_*(j) = \ker H_*(j)$?

Références

Félix Y., Halperin S. and Thomas J-C.
Rational Homotopy Theory,
Graduate Texts in Mathematics.Springer-Verlag, **205**, *New York, 2001.*

Hilali M.R.
Action du tore $\mathbb{T}^n$ sur les espaces simplement connexes,
PhD thesis, Université catholique de Louvain, 1980.

Yamaguchi T. and Yokura S.
On a Relative Hilali Conjecture,
Afr. Diaspora J. Math. (N.S.) **21**, *no. 1, 81-86, 2018.*

Zaim A.
Generalized relative Hilali conjecture,
Journal of Mathematics and Computer Science, 29 (2023), no. 4, 399-406.

Merci pour votre attention