

Théorie de Hodge

① Variétés de Kähler

①-1 Variétés complexes

Déf: fonction holomorphe $U \in \mathcal{I}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\boxed{f(z+h) - f(z) = hc + o(h)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = c \in \mathbb{C}$$

$$U \subset \mathbb{C}^n \text{ ouvert}$$

$$f: U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holo ssi}$$

"pp partieller holo .

$$z_k \mapsto f(z_1, \dots, z_k, \dots, z_n) \text{ holo .}$$

$$f: U \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$f = (f_1, \dots, f_n) \quad f_k: \text{holo .}$$

$$\text{CR: } z_k = x_k + i y_k \quad (i^2 = -1) \quad f_k = u_k + i v_k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y_j} = - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \end{array} \right.$$

$$\forall p \in U \quad \Rightarrow \quad D F(p) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Déf : Structure complexe : M variété
complexe
 $(U_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha$

(1) $(U_\alpha)_\alpha$ recouvrement M , $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$

(2) $\exists n \in \mathbb{N}$, $\phi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$ ~~th~~
 $\dim M = n$ $\forall_\alpha$

(3) si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$: $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$
holomorphe.

Ex: // $V \subset \mathbb{C}^n$: variété de dimension n .

(2) $GL_n(\mathbb{C})$ ouvert $\mathbb{C}^{n^2}$, variété complexe.

(3) $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \lambda z, \lambda \neq 0$

$U_i = \{ [z] \in \mathbb{CP}^n, z_i \neq 0 \}$ ouvert de $\mathbb{CP}^n$

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$$

$$\pi^{-1}(U_i) = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^*$$

$$\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$[z] \longrightarrow \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

$$\bar{\phi}_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(V_i \cap V_j) \rightarrow \phi_i(V_i \cap V_j)$$

holomorphisme.

$$\left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_i}, \frac{z_{j+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_r}{z_i} \right) \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_r}{z_i} \right)$$

$\downarrow$
 k, l

$$\frac{z_k}{z_j} \mapsto \frac{z_l}{z_i} \quad \text{holo?}$$

$$(4) \quad V(k, n) = \{ W \in M_{n \times k}(\mathbb{C}), \text{rank}(W) = k \}$$

Grassmannian

$$G(k, n) = V(k, n) / GL(k, \mathbb{C})$$

($\downarrow$)

~~W, W'~~

$$W \sim W' \Leftrightarrow \text{span } W = \text{span } W'.$$

$$I = \{ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \}$$

$W_I \in M_{k \times k}(\mathbb{C})$, k lineare W .

$$W \sim W' \Rightarrow \begin{aligned} & \forall I \quad \det(W_I) \neq 0 \\ & \Leftrightarrow \det(W'_I) \neq 0 \end{aligned}$$

$$U_I = \left\{ [W] \in GL(k, n) \mid \det(W_I) \neq 0 \right\}$$

gesamt.

$$\phi_I : U_I \longrightarrow \mathbb{C}^{(n-k)k}$$

$$[w] \longmapsto W_{I^c} \times W_I^{-1}$$

homeomorphisme.

$$\phi_I \circ \phi_J^{-1} : \phi_J(U_I \cap U_J) \longrightarrow \phi_I(U_I \cap U_J)$$

holomorphisme.

$$F : (M, (U_i, \phi_i)_{i \in I}) \longrightarrow (N, (V_j, \psi_j)_{j \in J})$$

how?

$$\forall p \in M \quad \exists i \in I, p \in U_i$$

$$\exists j \in J, F(p) \in V_j$$

$$\text{t. y. } F : U_i \cap F^{-1}(V_j) \xrightarrow{F} V_j$$

$\downarrow \phi_i$

$\downarrow \psi_j$

hence

$$\boxed{\phi_i(U_i \cap F^{-1}(V_j)) \xrightarrow{\psi_j \circ F \circ \phi_i^{-1}} \psi_j(V_j)}$$

$\mathcal{O}(U)$: ensemble des fonctions holomorphes
 $U \subset \mathbb{C}^n$
 $U \longrightarrow \mathbb{C}$

$\mathcal{O}^*(U)$: fonctions qui ne s'annulent
nulle part.

Théorème : M complexe compacte et connexe
 $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$: holomorphe.
alors f est constante.

Le principe du max :

Si $f \in \mathcal{O}(U)$, avec max local en p

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}$$

$\Rightarrow f$: constante sur $V(p)$.

Principe prolongement analytique :

$U \subset \mathbb{C}^n$ connexe , $f \in \mathcal{O}(U)$

f constante sur $V \subset U$
 $\Rightarrow f$ constante sur U

