ZAIM

Théorème de Leray-Hirsch.

Dans toute la suite, R est un anneau commutatif.

Théorème: soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{P} X$ un fibré localement trivial

Si

i) pour tout $n \geq 0$, $H^n(F,R)$ est un R-module libre de rang fini ($H^n(F;R) \simeq R^k$ où k est fini)

ii) Ils existent des classes $c_j \in H^{k_j}(E;R)$ telque leur restrictions $i^*(c_j)$ forment une base de $H^*(F;R)$.

alors le morphisme suivant. L: $H^*(X;R) \otimes_R H^*(F,R) \to H^*(E;R)$

$$b \otimes i^*(c_j) \to p^*(b) \cup c_j$$

cup produit

est un isomorphisme de R-module.

Remarques:

- Si F est elliptique et i^* est surjective, alors $H^*(E) \simeq H^*(F) \otimes H^*($

- La condition (ii) dans le théorème est nécessaire, sinon on considère le fibré de Hopf $S^1 \xrightarrow{i} S^3 \xrightarrow{P} S^2$

$$H^*(S^3) \not\simeq H^*(S^1) \otimes H^*(S^2).$$

Notations: soit $Y \subseteq X$, notons $E_Y = p^{-1}(Y)$ et ε_Y le composé de deux morphismes suivants: $H^*(F,R) \xrightarrow{\delta} H^*(E,R) \xrightarrow{H^*(i_Y)} H^*(E_Y;R)$

$$i^*(g_j) \longrightarrow g_j \longrightarrow H^*(i_Y)(g_j)$$

avec $i_Y : E_Y \hookrightarrow E$ et notons aussi $H^*(F;R)$ par M.

Définissons L_Y : $H^*(Y,R) \underset{R}{\otimes} M \longrightarrow H^*(E_Y;R)$

$$b \otimes i^*(g_j) \longrightarrow p^*(b) \cup \varepsilon_Y(g_j)$$

Notre objectif est de montrer que si $Y = X$, L_X est un isomorphisme.

Par récurrence sur $\dim X$ (X CW-complexe).

preuve: par réccurence sur dim X

- $X = \{a\}$, alors $H^*(X,R) \otimes H^*(F,R) \simeq R \underset{R}{\otimes} H^*(F,R) \simeq H^*(F,R)$ et il est evident dans ce cas que $E \simeq F$ ce qui implique que $H^*(E,R) \simeq H^*(F,R)$.

donc $H^*(X,R) \otimes H^*(F;R) \simeq H^*(E)$.

- Supposons que L est un isomorphisme pour X^{n-1} (toute squelette de dimension $n-1$) et on le démontre pour X^n.

Posons $U = X^{n-1} \underset{\varphi_\alpha}{\cup} (e_\alpha^n \setminus \{0\}) \underset{r.h.t}{\sim} X^{n-1}$; $V = \underset{\alpha}{\cup} e_\alpha^n$

on peut vérifier facilement que $X = X^n = U \cup V$.

Appliquons la suite de Mayer-Vietoris à X, ce qui nous permet de construire le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
H^*(X^n;R)\otimes_R M \arrow[r, "L_{X^n}"] \arrow[d] & H^*(E_{X^n};R) \arrow[d] \\
\left(H^*(U;R)\otimes_R M\right)\oplus\left(H^*(V;R)\otimes M\right) \arrow[r, "(L_U, L_V)"] \arrow[d] & H^*(E_U;R)\oplus H^*(E_V;R) \arrow[d] \\
H^*(U\cap V;R)\otimes_R M \arrow[r, "L_{U\cap V}"'] & H^*(E_{U\cap V};R)
\end{tikzcd}$$

pour montrer que L_{X^n} st un isomorphisme, il suffit de montrer que $L_U, L_V, L_{U\cap V}$ sont des isomorphismes et en utilisant le lemme des cinqu pour déduire le résultat.

L_U est un isomorphisme.

$$\begin{tikzcd}
H^*(U;R)\otimes_R M \arrow[r, "L_U"] \arrow[d, "\cong"', "U\sim X^{n-1}"] & H^*(E_U;R) \arrow[d, "\cong \text{ car } E_U\sim E_{X^{n-1}}"] \\
H^*(X^{n-1};R)\otimes M \arrow[r, "\cong"'] & H^*(E_{X^{n-1}};R)
\end{tikzcd}$$

par hypothèse de récurrence.

$\Rightarrow L_U$ un isomorphisme.

- L_V est un isomorphisme?

on sait que: $V = \bigsqcup_\alpha e_\alpha^n$ et considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
H^*(V;R)\otimes M \arrow[r, "L_V"] \arrow[d] & H^*(E_V;R) \arrow[d] \\
\Pi(H^*(e_\alpha^n)\otimes M) \cong \Pi H^*(e_\alpha^n)\otimes M \cong H^*(\bigsqcup_\alpha e_\alpha^n)\otimes_R M \arrow[d, "\cong"'] & H^*(E_{e_\alpha^n};R) \arrow[d, "\cong"] \\
\Pi(H^*(e_\alpha^n)\otimes M) \arrow[r, "\Pi L_{e_\alpha^n}"', "\cong"] & \Pi H^*(E_{e_\alpha^n};R)
\end{tikzcd}$$

$\Pi L_{e_\alpha^n}$ est un isomorphisme car $L_{e_\alpha^n}$ l'est.

- $L_{U\cap V}$ est un isomorphisme?

comme $U\cap e_\alpha^n \simeq S_\alpha^{n-1}$, on a.

$$\begin{tikzcd}
H^*(U\cap e_\alpha^n,R) \arrow[r, "L_{U\cap e_\alpha^n}"] \arrow[d, "\cong"'] & H^*(E_{U\cap e_\alpha^n};R) \arrow[d, "\cong"] \\
H^*(S_\alpha^{n-1};R)\otimes_R M \arrow[r, "\cong"', "\text{par récurrence}"'] & H^*(E_{S_\alpha^{n-1}};R)
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow L_{U\cap e_\alpha^n}$ un isomorphisme et par suite $L_{U\cap V} = \Pi L_{U\cap e_\alpha^n}$ est un isomorphisme.

References: Allen Hatcher page