Essai sur les conjectures de Hilali et de Halperin: Amélioration de l'Inégalité de Puppe.

AAYA Hassan

24/11/2018

A mes très chers parents

A la mémoire de ma soeur Mouna

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse M. Hilali Mohamed Rachid pour sa générosité, sa disponibilité et toute son aide durant ces quelques années passées dans la préparation de cette thèse, il était pour moi celui qui m'a toujours guidé et inspiré, mais aussi un ami et un frère avec des qualités humaines d'écoute et de compréhension qui m'ont beaucoup facilité ce travail.

Mes remerciements vont aussi à mon professeur Cherfaoui Najib, qui était derrière cette heureuse rencontre avec la topologie algébrique, et aussi au professeur EL Kacimi Aziz, pour tout le temps qu'il a généreusement octroyé pour la réussite de ce travail.

Je ne pourrai aussi me passer d'avoir une pensée aux membres de notre groupe de recherche MAAT, qu'ils trouvent ici tous ma gratitude pour leur contribution de près ou de loin à ce travail.

Je remercie profondément le professeur M. Bouhamza pour avoir accepté de présider le jury de ma soutenance, ainsi que les membre de jury MM. A. Abouqateb, A. Chaichaa et M. Sbai, pour leurs remarques et corrections qui ont contribué à améliorer ce manuscrit, et au professeur H. Hamraoui pour son aide et son soutient depuis le premier jour de mon inscription en thèse.

Mes remerciements vont également à tous les membres de ma famille qui n'ont jamais cessé de me supporter tout au long de ces années passées à préparer ce travail, j'en site ma mère, mon père, ma femme Hassna, mon frère Mohamed et mes enfants Firdaws et Ahmed Ziad.

TABLE DES MATIÈRES

PUBLICATIONS

- **Article Publié :** On the toral rank conjecture and some consequences, Proyecciones Journal of Mathematics Vol. 36, No 2, pp. 299-306, June 2017. Universidad Catholica del Norte Antofagasta - Chile.

- **Article Soumis :** On the Hilali conjecture for odd graded homotopy groups, Afrika MAthematika, Avril 2017.

- **Poster :** Other weaker versions of the Halperin Inequality : $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq P(rk_0(X))$, Conférence : « GeToPhyMa 2014 : Moduli and configuration spaces in Mathematics and Physics » 03-06 Juin 2014 à l'UIR.
- **Communication orale :** Improvement of Allday-Puppe inequality $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq P(rk_0(X))$, Conférence : Modular invariants Universitat Regensburg Allemagne 08-12 septembre 2014

INTRODUCTION

La topologie algébrique représente l'un des champs de recherche les plus prolifères en mathématiques durant les cents dernières années, elle s'est développée de manière fulgurante pour donner naissance à de nouvelles branches qui connaissent un développement effréné.

L'une des finalités principales de la topologie algébrique est d'associer des invariants algébriques comme les groupes d'homotopie ou d'homologie à des espaces topologiques, ces invariants vont permettre par la suite de classifier les espaces selon leurs types d'invariants.

Mais il s'avère qu'on ne sait même pas calculer les groupes d'homotopie des sphères, $\pi_n(\mathrm{S}^r)$ sauf, bien sûr, si $n < r$ (c'est $\{0\}$) et si $n = r$ (c'est $\mathbb{Z}$). On ne connaît que des résultats particuliers : $\pi_3(\mathrm{S}^2) = \mathbb{Z}$ (H. Hopf) ; $\pi_{n+1}(\mathrm{S}^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 3$ (H. Hopf) ; $\pi_n(\mathrm{S}^r)$ est abélien fini si r est impair et $n > r$ (J.-P Serre) ; toutes les sphères de dimension > 1 ont une infinité de groupes d'homotopie non nuls (J.-P Serre) ; $\pi_n(\mathrm{S}^5) \neq 0$ pour tout $n \geq 5$ (Curtis), etc. On a tout de même quelques résultats généraux : par exemple, si la variété X est *compacte*, alors $\pi_n(\mathrm{X})$ est un groupe *de type fini.* Mais il est quasiment impossible pour le moment d'en savoir plus. Les topologues se sont donc fixé un objectif moins ambitieux : peut on au moins décrire :

$$\pi_n(\mathrm{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

(la partie libre du groupe) ? Et là, il se trouve que la réponse est oui, du moins si X est simplement connexe (c'est-à-dire si $\pi_1(\mathrm{X}) = 0$) : dans ce cas, on peut calculer les groupes $\pi_n(\mathrm{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ à partir du complexe de de Rham, grâce à la théorie de Quillen-Sullivan.

C'esi ainsi que naquit la théorie de l'homotpie rationnelle, elle s'est développée avec les travaux de Quillen aux années 1960 et Sullivan aux années 1970.

Il s'agit d'une théorie où plusieurs problèmes ouverts challengent les chercheurs aux quatre coins du globe, pour nous dans le présent travail on s'intéressera à deux problèmes d'entre eux à savoir la conjecture de Hilali et la conjecture de Halperin, dans l'espoir d'apporter notre pierre à ce magnifique édifice, d'abord on s'est intéressé à la conjecture de Hilali et qui est toujours ouverte depuis 1990, et qui a été résolue pour des cas particuliers d'espaces topologiques (cf www.algtop.net), en suite et par soucis de comprendre l'origine de cette conjecture j'ai commencé à étudier la conjecture de Halperin toujours ouverte après plus de quarante ans.

La conjecture de Hilali [16] stipule que, la dimension des groupes d'homotopie rationnelle d'un espace topologique elliptique, simplement connexe est toujours inférieure à celle de sa cohomologie rationnelle :

$$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq \dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$$

Dans la théorie de l'homotopie rationnelle on a l'avantage de pouvoir associer à chaque espace topologique simplement connexe X, une algèbre différentielle graduée qui encode complètement le type d'homotopie rationnelle de cette espace. Ce résultat très profond est dû à Sullivan [32], c'est une correspondance bijective entre les "modèles minimaux de Sullivan" et les "types d'homotopie rationnelle".

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{types d'homotopie} \\ \text{rationnelle} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\cong} \left\{ \begin{array}{c} \text{classes d'isomorphismes des} \\ \text{modèles minimaux de Sullivan sur } \mathbb{Q} \end{array} \right\}$$

Le modèle minimal de Sullivan associé à un espace X via cette correspondance est une algèbre différentielle graduée commutative simple de la forme $(\Lambda V, d)$, où ΛV est l'algèbre graduée commutative libre sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué $V = \{V^n\}_{n\geq 2}$.

Ce modèle minimal de Sullivan $(\Lambda V, d)$ est lié à l'espace X par les propriétés suivantes :

$$H^n(\Lambda V, d) \cong H^n(X; \mathbb{Q}) \;\; et \;\; Hom_{\mathbb{Z}}(V^n, \mathbb{Q}) \cong \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} \, (n \geq 0)$$

La version algébrique de la conjecture de Hilali s'écrit donc :

$$\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V.$$

Par ailleurs, la très célèbre conjecture de Halperin $[10, p.271]$ sur l'action du tore sur les espaces topologiques stipule que pour tout espace topologique X qui admet une action d'un n-tore T^n, la somme des nombres de Betti d'un tel espace lorsque l'action est presque libre est toujours supérieur à 2^n.

Nous disons que l'action est presque libre si chaque sous-groupe d'isotropie est fini. Le plus grand nombre entier $n \geq 1$ pour lequel X admet qu'un n-tore presque libre s'appelle le rang torique de X et noté $rk(X)$. Si X n'admet pas d'action de tore presque libre, alors $rk(X) = 0$. Malheureusement, $rk(X)$ n'est pas un invariant d'homotopie et est assez difficile à calculer. Pour obtenir un invariant homotopique, nous définissons le rang torique rationnel, $rk_0(X)$ qui est le maximum des $rk(Y)$ parmi tous les CW-complexes fini Y de même type d'homotopie rationnelle que X.

Conjecture (La conjecture du rang Torique).
Si X est simplement connexe, alors $\dim H^*(X; \mathbb{Q}) \geq 2^{rk_0(X)}$.

Conjecture (La conjecture de Hilali).
Si X est elliptique et simplement connexe, alors

$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq \dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$.

Compte tenu de la difficulté de ces conjectures qui sont classées NP-Hard [23], nous allons donner des minorations polynomiales de la dimension cohomologique. Nous commençons par donner une autre preuve de l'inégalité de Puppe, puis nous établissons une minoration qui améliore celles de Puppe et d'Amann.

Théorème A (Inégalité de Puppe).
Si X est simplement connexe, alors $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq 2rk_0(X)$.

Théorème (Amann)
Si un n-tore T agit presque librement sur un espace X de Hausdorff paracompacte de dimension finie, alors $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq 2(n+[n/3])$.

Théorème B
Soit X un espace topologique simplement connexe avec une action de T^n presque libre, on note $n = rk_0(X)$.
Pour $n \geq 4$ nous avons toujours $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq 3n-2$.

Théorème C
La conjecture de Hilali est vraie dans le cas des espaces elliptiques simplement connexes dont le modèle minimal de Sullivan $(\Lambda V, d)$ vérifie :
$V = \mathbb{Q}(a_i)_{1\leq i\leq n}$ *avec* $|a_i| \in 2\mathbb{N}+1$ *et* $\left[(da_i)^2\right] = 0$ *pour tout i.*

Cette thèse est organisée comme suit :

— Le trois premiers chapitres sont consacrés aux outils de base nécessaires à la résolution des questions posées.

— Dans le quatrième chapitre nous donnons une nouvelle preuve du théorème A de Puppe, et aussi nous démontrons la nouvelle minoration polynomiale annoncée au théorème B.

— Au chapitre 5, nous vérifions par le théorème C la validité de la conjecture de Hilali des espaces rationnels elliptiques 1-connexes, dont les groupes d'homotopie sont concentrés aux degrés impairs, et vérifiant une certaine condition d'attachement.

CHAPITRE 1

GROUPES DE LIE ET ESPACES HOMOGÈNES

1.1 Groupes et algèbres de Lie

1.1.1 Groupes de Lie

Dans ce chapitre, nous allons donner la définition et quelques propriétés de base des groupes de Lie. La documentation est abondante sur ce sujet on peut se référer à [2].

Définition. *Un groupe de Lie est un ensemble G qui est à la fois une variété différentielle et un groupe pour lequel la multiplication, $(g, g') \mapsto gg'$, et l'application inverse, $g \mapsto g^{-1}$, sont lisses. La dimension d'un groupe de Lie est sa dimension en tant que variété différentielle. Un homomorphisme de groupes de Lie est un homomorphisme de groupes qui est aussi une application lisse. Un isomorphisme de groupes de Lie est un homomorphisme f qui admet un inverse f^{-1} tel que f^{-1} soit aussi un homomorphisme de groupes de Lie.*

Par exemple, $\mathbb{R}$ et S^1 sont des groupes de Lie pour les structures habituelles des variétés et des groupes. On remarque que par définition le produit de deux groupes de Lie est un groupe de Lie pour les deux structures canoniques du produit de groupes et produit de variétés. Donc $\mathbb{R}^n$ et $(S^1)^n$ sont

des groupes de Lie. Les tores $T^n = (S^1)^n$ qui seront étudiés dans cette thèse sont un exemple classique de groupes de Lie, on peut y ajouter les différents groupes de matrices.
Observons aussi que si V est un espace vectoriel réel, l'ensemble $Gl(V)$ des isomorphismes linéaires sur V est un groupe de Lie.

Remarque. Certaines propriétés requises dans la Définition 1.1 sont en fait automatiques :

- Si la multiplication est une application lisse, alors l'inverse l'est aussi (Par le théorème des fonctions implicites).
- Un homomorphisme bijectif de groupes de Lie est un isomorphisme de groupes de Lie.
- Un homomorphisme bijectif de groupes de Lie est un isomorphisme de groupes de Lie.
- Une application $f : G \to H$ entre groupes de Lie qui est à la fois un homomorphisme des groupes et une application continue est un homomorphisme des groupes de Lie.

Un sous groupe de Lie d'un groupe de Lie G est à la fois un sous groupe et une sous variété de G. Les sous groupes de Lie peuvent être déterminés avec le théorème suivant d'Elie Cartan.

Théorème 1.1.1. *([10, chap1]) Un sous groupe H d'un groupe de Lie compact G est un sous groupe de Lie de G si et seulement si H est un sous groupe fermé de G.*

On s'intéressera dans la suite aux groupes de Lie connexes compacts, et à leur type d'homotopie, et on a le théorème de décomposition d'Iwasawa suivant :

Théorème 1.1.2. *Tout groupe de Lie connexe G admet un sous-groupe maximal compact H (de façon unique) tel que G soit isomorphe au produit $H \times \mathbb{R}^m$. En particulier G et H ont le même type d'homotopie.*

1.1.2 Algèbres de Lie

Nous introduisons ici la notion d'algèbre de Lie.

Définitions. *Une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une application bilinéaire, qu'on appelle crochet de Lie,*

$$[-,-] : \mathcal{L} \times \mathcal{L}(\rightarrow)\mathcal{L}$$

telle que, pour tout $l_1 \in \mathcal{L}, l_2 \in \mathcal{L}, l_3 \in \mathcal{L}$, on ait :
$\bullet [l_1, l_2] = -[l_2, l_1]$ *(anti-symétrie),*
$\bullet [l_1, [l_2, l_3]] + [l_2, [l_3, l_1]] + [l_3, [l_1, l_2]] = 0$ *(Identité de Jacobi).*
Un homomorphisme d'algèbre de Lie est une application linéaire,

$$\varphi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

qui préserve le crochet de Lie, c'est à dire :

$$\varphi[l_1, l_2] = [\varphi(l_1), \varphi(l_2)] \text{ pour tout } (l_1, l_2) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}.$$

Une sous algèbre d'une algèbre de Lie est un sous espace vectoriel $\mathfrak{n}$ tel que $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{n}$. Un idéal de $\mathcal{L}$ est une sous algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ telle que $[\mathfrak{n}, \mathcal{L}] \subseteq \mathfrak{n}$.

Toute structure d'algèbre associative sur un espace vectoriel A donne une structure canonique de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_A$ sur le même espace vectoriel par $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$. Notre exemple le plus intéressant vient de la structure d'un groupe de Lie G.
Observons que, en raison de la structure du groupe, tout phénomène à un point particulier de G peut être traduit partout dans G en composant avec les éléments du groupe. Par exemple, un groupe de Lie connexe est généré, comme espace topologique, par tout voisinage de l'identité e. Nous formalisons cette remarque en introduisant la notion de translation à gauche et à droite.

Définition. *Soit $g \in G$, on construit la translation $L_g : G \rightarrow G$ avec $L_g(h) = g \cdot h$ pour tout $h \in G$. de manière similaire nous définissons la translation à droite R_g par $R_g(h) = h \cdot g$.*

1.1.3 Groupes de Lie abéliens

Il est essentiel d'étudier les groupes de Lie abéliens et les sous-groupes de Lie abéliens d'un groupe de Lie connexe et compact.

Définition. *Un groupe de Lie abélien est un groupe de Lie G qui satisfait $gg' = g'g$ pour tout $(g, g') \in G \times G$. Une algèbre de Lie abélienne est une algèbre de Lie $\mathcal{Y}$ telle que $[l, l'] = 0$ pour tout $(l, l') \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$.*

On peut prouver qu'un groupe de Lie G est abélien si et seulement si son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est abélienne. Un produit de n cercles est un groupe de Lie abélien, appelé n-tore (ou simplement un tore) et noté T^n, les tores sont des exemples des groupes de Lie abéliens.

Théorème 1.1.3. *Tout groupe de Lie abélien connexe G est isomorphe au produit des groupes de Lie $T^p \times \mathbb{R}^q$.*

Par conséquent, tout sous-groupe abélien de Lie connexe d'un groupe de Lie compact G est un tore T. On appelle un sous-tore $T \subset G$ le tore maximal dans G s'il n'est pas contenu dans un autre tore, on peut alors prouver le résultat qui suit :

Théorème 1.1.4. *Tout élément d'un groupe de Lie compact et connexe appartient à un tore maximal, deux tores maximaux sont conjugués.*

La dimension d'un tore maximal est appelée le rang du groupe de Lie, et le normalisateur d'un tore maximal T de G est un groupe de Lie compact noté $N(T)$.
Le quotient $W(G) = N(T)/T$ est appelé le groupe Weyl de G. A isomorphisme près, ce groupe ne dépend pas du choix d'un tore maximal en G, en fait, $W(G)$ est un groupe fini.
Notez que puisque T est abélien, la restriction de l'action de conjugaison de $N(T)$ à T est triviale sur T, donc elle donne une action de $W(G)$ sur T.

1.2 Action de groupe

Définitions. • *Une action à gauche d'un groupe topologique G sur un espace topologique X est une application continue*

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & G\times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \mapsto & g.x \end{array}$$

telle que : $\forall g,h\in G, x\in X \qquad g.(hx)=(gh).x \quad$ *et* $\quad e.x=x$

• *Un G-espace à gauche (X,ρ) est constitué d'un espace X et d'une action à gauche ρ de G sur X.*

• *L'homéomorphisme*

$$\begin{array}{rccc} l_g\colon & X & \longrightarrow & X \\ & x & \mapsto & g.x \end{array}$$

est appelé translation à gauche par g.

• *On peut définir une action à droite :*

$$\begin{array}{ccc} X\times G & \longrightarrow & X \\ (x,g) & \mapsto & x.g \end{array}$$

qui satisfait : $\forall g,h\in G, x\in X \qquad (xh).g=x.(hg) \quad$ *et* $\quad x.e=x.$

• *Une action est dite fidèle si :* $\forall x\in X \qquad g.x=x\Longrightarrow g=e$

• *Une action est dite triviale si :* $\forall x\in X,\ \forall g\in G \qquad g.x=x.$

• *la relation R sur $X\times X$ définie par :* $xRy \iff \exists g\in G \quad /y=gx$ *est une relation d'équivalence sur X.*

• *La classe d'équivalence de $x\in X$ est l'orbite Gx.*

• *l'ensemble des classes d'équivalences mod R est notée X/G, est appelé l'espace orbite.*

• *On note $q\colon X\longrightarrow X/G$ l'application quotient.*

• *Une action est dite transitive s'elle contient un seul orbite.*

• *L'ensemble $G_x=\{g\in G/gx=x\}$ est un sous groupe de G appelé groupe d'isotropie (ou stabilisateur) en x.*

• *Une action est dite libre si tous les groupes d'isotropies sont triviaux.*

• *On a* $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.
• *On dit que l'action est presque libre si les groupes d'isotropie sont finis.*
• *Soit* $A \subset X$ *avec* X *un* G*-espace,* A *est dite* G*-stable ou* G*-invariante si :*
$\forall g \in G \quad \forall a \in A \quad ga \in A$.
• *Pour tout sous groupe* $H \subset G$*, l'ensemble* $X^H = \{x \in X \quad / hx = x \quad \forall h \in H\}$ *est appelée les points fixes par* H.
• *Soient* X *et* Y *deux* G*-espaces, une application* $f \colon X \longrightarrow Y$ *est appelée* G*-application ou application* G*-équivariante si :*
$\forall g \in G \quad \forall x \in X \quad f(gx) = gf(x)$.
• *Si* $(X_j)_{j\in J}$ *est une famille de* G*-espaces alors l'espace topologique produit* $\prod_{j\in J} X_j$ *avec l'action diagonale :*

$$\begin{array}{ccc} G \times \prod_{j\in J} X_j & \longrightarrow & \prod_{j\in J} X_j. \\ (g, (x_j)_{j\in J}) & \mapsto & (gx_j)_{j\in J} \end{array}$$

est un produit dans la catégorie $G - TOP$.
• *Une* G*-application* $f \colon X \longrightarrow Y$ *induit par passage à l'espace des orbites* X/G *une application* $f/G \colon X/G \longrightarrow Y/G$.
• *Une homotopie équivariante ou* G*-homotopie* H_t *est une homotopie telle que* $\forall t$ H_t *est une* G*-application .*

Proposition 1.2.1. *Soient* X *un* G*-espace,* $A \subset G$*,* $B \subset X$
si B *est un ouvert alors* AB *est un ouvert.*
l'application orbite $q \colon X \longrightarrow X/G$ *est ouverte.*

1.3 Fibré localement trivial

Définition. *Soient* $p \colon E \longrightarrow B$ *une application continue et un ouvert* $U \subset B$ *; supposons que* p *est surjective pour éviter les fibres vides.*
Une trivialisation de p *au dessus de* U *est un homéomorphisme* $\varphi \colon p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ *c'est à dire un homéomorphisme qui vérifie* $pr_1 \circ \varphi = p$
comme φ *induit un homéomorphisme de* $p^{-1}\{u\}$ *dans* $\{u\} \times F$ *alors* F *est déterminé à partir de l'homéomorphisme.*

L'application p est localement triviale s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de B tel que p admet une trivialisation au-dessus de chaque $U \in \mathcal{U}$
Une application localement triviale est dite un fibré, et une trivialisation locale une carte locale.
Si les fibres sont homéomorphes à F ; alors F est dit fibre typique.
L'espace B est dit espace base, et E espace total.

Exemple.

1. L'application projection $X \times F \longrightarrow X$ est une application localement triviale de fibre F.
2. L'application $exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ définie par : $exp(t) = e^{2i\pi t}$ est localement triviale de fibre Z
3. Tout revêtement $p\colon E \longrightarrow B$ avec B connexe est une application localement triviale de fibre discret.

Définition. *une section du fibré $p\colon E \longrightarrow B$ est une application continue $s\colon B \longrightarrow E$ telle que :*

$$p \circ s = id_B \text{ c'est à dire } \forall b \in B \quad s(b) \in p^{-1}(b)$$

Définition. *Soient (E, p, B) et $\left(E^{'}, p^{'}, B^{'}\right)$ deux fibrés. Un morphisme de fibrés $(u, f)\colon (E, p, B) \longrightarrow \left(E^{'}, p^{'}, B^{'}\right)$ est une paire d'applications $u\colon E \longrightarrow E^{'}$ et $f\colon B \longrightarrow B^{'}$ telle que : $p^{'}u = fp$ c'est à dire le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E^{'} \arrow[d, "p^{'}"] \\ B \arrow[r, "f"'] & B^{'} \end{tikzcd}$$

Comme :

$$\forall b \in B \quad u(p^{-1}(b)) \subset p^{'^{-1}}(f(b)),$$

On dit que le morphisme préserve les fibres.

Définition. *Soient (E, p, B) et $\left(E^{'}, p^{'}, B\right)$ deux fibrés sur B.Un morphisme de fibre sur B, est une application $u\colon E \longrightarrow E^{'}$ telle que le diagramme suivant* *est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Comme $\forall \quad b \in B \quad u(p^{-1}(b)) \subset (p')^{-1}(b)$, On dit que u préserve les fibres.

• $(id_E, id_B)\colon\ (E, p, B) \longrightarrow (E, p, B)$ est un morphisme de fibrés
• Si $(u, f)\colon\ (E, p, B) \longrightarrow \big(E', p', B'\big)$ et $(u', f')\colon\ \big(E', p', B'\big) \longrightarrow \big(E'', p'', B''\big)$ sont des morphismes de fibrés, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "p'"'] & E" \arrow[d, "p""'] \\ B \arrow[r, "f"'] & B' \arrow[r, "f'"'] & B" \end{tikzcd}$$

Par conséquent, les compositions définissent un morphisme de fibrés $(u'u, f'f)\colon\ (E, p, B) \longrightarrow \big(E'', p'', B''\big)$.

Définition. *La catégorie des fibrés notée **Bun** à pour objets : les fibrés, les morphismes : les morphismes de fibrés, la composition : la composition définie ci-dessus.*
La sous catégorie des fibrés sur B notée $\boldsymbol{Bun_B}$ à pour objets : les fibrés de base B, les morphismes ; les morphismes de fibrés de bases B.

Définition. *Soient $p\colon E \longrightarrow B$ un fibré de fibre F et $f\colon B' \longrightarrow B$ une application continue. On définit le fibré induit par*

$$f^*E = \Big\{(b', e) \in B' \times E / f(b') = p(e)\Big\} \subset B' \times E$$

muni de la topologie induite de $B' \times E$ et la projection $p'\colon f^*E \longrightarrow B'$ définie par $p'(b', e) = b'$ et la projection $u\colon f^*E \longrightarrow E$ définie par $u(b', e) = e$ tels *que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Si (U, φ) *est une trivialisation locale alors* $(f^{-1}(U), \psi)$ *est une trivialisation locale de* f^*E *où* $\psi(b', e) = (b', proj_2(\varphi(e)))$.
Ainsi f^*E *est un fibré de base* B' *et de fibre* F.

Proposition 1.3.1. • *Toute section* s *du fibré* $p\colon E \longrightarrow B$ *induit une section* f^*s *sur* f^*E *définie par* $f^*s = s \circ f$
• *Soit* (u, f) *un morphisme de fibrés*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

alors il existe une application $v\colon E' \longrightarrow f^*E$ *telle que :*

$$\begin{tikzcd} & f^*E \arrow[dl] \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ E' \arrow[ur, dashed, "v"] \arrow[rr, "u"'] \arrow[d] & & E \arrow[d] \\ B' \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd}$$

Théorème 1.3.1. *Soit le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f_0", "f_1"'] & B \end{tikzcd}$$

avec f_0 *et* f_1 *sont homotopes alors* $f_0^*(E) \simeq f_1^*(E)$.

1.4 Fibré principal

1.4.1 Définitions

Définition. *Soit G un groupe topologique qui agit à droite sur un espace topologique E.*
Un G-fibré principal est un fibré $p\colon E \longrightarrow B$ avec G préserve et agit librement et transitivement sur les fibres.

Remarques. • Chaque fibre est homéomorphe à G.
• Comme l'action préserve les fibres et agit transitivement alors les orbites de cette action sont les fibres et E/G est homéomorphe à B.
• Dans la catégorie des variétés différentielles, on définit de la même façon un G-fibré principal avec $p\colon E \longrightarrow B$ est C^∞-différentiable, G un groupe de Lie, et l'action est C^∞-différentiable.

Exemples.
1. $p\colon B \times G \longrightarrow B$ est un G-fibré principal.
2. Soit H un sous groupe fermé d'un groupe de Lie G alors $p\colon G \longrightarrow G/H$ est un H-fibré principal.
3. $p\colon S^n \longrightarrow RP^n$ est un Z_2-fibré principal.

1.4.2 Propriétés

Proposition 1.4.1. *Tout morphisme de fibrés principaux est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $\sigma\colon E \longrightarrow E^{'}$ un morphisme. Supposons que $E = E^{'} = B \times G$ alors $\sigma(b, g) = (b, f(b)g)$ avec $f\colon B \longrightarrow G$ une application continue, est un isomorphisme avec $\sigma^{-1}(b, g) = (b, f(b)^{-1}g)$.
D'où la propriété est vraie si E et $E^{'}$ sont triviaux, et comme chaque fibré principal est une application localement triviale d'où le résultat. □

Définition. *Un G-fibré principal est trivial s'il est isomorphe au fibré principal*

$$p\colon B\times G\longrightarrow B.$$

Proposition 1.4.2. *Un fibré principal $p\colon E\longrightarrow B$ est trivial s'il admet une section.*

Démonstration. La condition nécessaire est triviale, Réciproquement, soit $s\colon B\longrightarrow E$ une section, d'où l'application : $\phi\colon B\times G\longrightarrow E$ définie par $\phi(b,g)=s(b)g$ est un morphisme de fibrés principaux donc c'est un isomorphisme. □

Proposition 1.4.3. *Soit M une variété différentielle, G un groupe de Lie et $\mu\colon M\times G\longrightarrow M$ une action C^∞-différentiable, libre et propre(ou G compact) alors M/G est une variété C^∞-différentielle et $p\colon M\longrightarrow M/G$ est G-fibré principal.*

1.4.3 Classification des fibrés principaux

Théorème 1.4.1. *Supposons que $p\colon E\longrightarrow B$ est un G-fibré principal avec E faiblement contractile alors pour tout CW-complexe X l'application :*

$$\begin{array}{cccc}\phi\colon & [X,B] & \longrightarrow & \mathcal{P}_G(X)\\ & f & \longmapsto & f^*E\end{array}$$

est bijective.

Remarque. On dit que B est l'espace classifiant de G et $p\colon E\longrightarrow B$ un G-fibré principal universel
On écrit BG pour l'espace classifiant G et EG pour l'espace total du fibré universel :

$$p\colon EG\longrightarrow BG=EG/G.$$

Proposition 1.4.4. *Supposons l'existence d'un G-fibré $p\colon E\longrightarrow B$ universel alors :*

1. *B peut être pris comme CW-complexe.*

2. *l'espace classifiant B est unique à équivalence d'homotopie prés.*
3. *E est unique à équivalence G-homotopique prés.*

Théorème 1.4.2. *tout groupe topologique G admet un espace classifiant BG.*

Construction de Milnor

Le joint infini d'un groupe G est : $EG = \{(t_0g_0, t_1g_1, ...)/\forall i \in I, t_i \in [0,1], g_i \in G$, les t_i presque tous nuls ; $\sum_{i\in I} t_i = 1\}$. Un élément de EG est noté $< g, t >$

$$< g,t > \sim < g^{'}, t^{'} > \Leftrightarrow \forall i \in I\, t_i = t_i^{'}\, et\, g_i = g_i^{'}\, \forall i \in I\, t_i > 0$$

On munit EG de l'action définie par $< g, t > h = < gh, t >$,
d'où EG est muni d'une topologie compatible avec l'action de G
Les espaces EG et BG sont fibrés par :

$$... \subset EG(n) \subset EG(n+1) \subset ... \subset EG$$

$$... \subset BG(n) \subset BG(n+1) \subset ... \subset BG$$

avec $EG(n) = \{(t_0g_0, t_1g_1, ...) \in EG; t_i = 0 \quad pour\, i > n\}$ et $BG(n) = p(EG(n))$.

Théorème 1.4.3. *$p\colon EG \longrightarrow BG$ est un G-fibré universel.*

Remarques. Si on définit $Prin_G(X)$ comme étant l'ensemble des classes d'isomorphisme de G-fibrés principaux sur X, alors l'existence d'un fibré G-principal universel nous fournit une bijection $Prin_G(X) \simeq [X; B]$.

Exemples.

1. $ES^1 = S^\infty$, $BS^1 = S^\infty/S^1 = \lim\limits_{n\to+\infty} S^{2n+1}/S^1 = CP^\infty$
   On a $H^*(CP^n, R) = R[t]/(t^{n+1})$ d'où $H^*(BS^1 = R[t]$.
2. $EZ_2 = S^\infty$, $BZ_2 = S^\infty/Z_2 = RP^\infty$.
3. Si $G = G_1 \times G_2$, $EG = EG_1 \times EG_2$, et $BG = BG_1 \times BG_2$.
   En particulier $B(S^1 \times .... \times S^1) = CP^\infty \times ... \times CP^\infty$ et $H^*(B(S^1 \times .... \times S^1)) = H^*(BS^1 \times ... \times BS^1) \cong H^*(BS^1) \otimes ... \otimes H^*(BS^1) \cong R[t_1, ..., t_n]$
4. Soit H un sous groupe de G alors $BH \simeq EG/H$ et $BH \longrightarrow BG$ est un fibré de fibre G/H.

1.5 Espaces homogènes

Nous présentons ici la définition des espaces homogènes qui sont introduits et étudiés comme exemples de fibrés.

Définition. *Soit G un groupe et H un sous-groupe, l'espace G/H muni de la multiplication à gauche comme G-action est appelé un espace homogène.*

Le mot "homogène" vient du fait que les propriétés algébriques de G/H sont les mêmes en tous ses points puisqu'on peut passer de l'un à l'autre par action de G.
Lorsque G est un groupe de Lie et H un sous groupe de Lie, G/H est une variété différentiable. Les espaces homogènes fournissent donc une quantité d'exemples intéressantes de variétés. Ce sont les variétés les plus "simples" qui existent (les groupes de Lie eux-mêmes étant des cas particuliers d'espaces homogènes).

Remarque. Une variété donnée peut parfois s'écrire de diverses façons comme espace homogène de groupes de Lie. En d'autres termes, deux quotients G_1/H_1 et G_2/H_2 peuvent très bien être difféomorphes, même si $G_1 \neq G_2$ (par exemple, $SU(3) = SU(2)$ et $SO(6) = SO(5)$ sont tous deux difféomorphes à la sphère S^5.
Ainsi, deux groupes différents peuvent agir transitivement sur le même espace.
Les résultats concernant la théorie des espaces homogènes sont très utiles dans de nombreuses branches des mathématiques et de la physique théorique.

Exemples. Les espaces homogènes jouent un rôle important en géométrie :
• L'action du groupe orthogonal $O(n+1)$ sur la sphère S^n par la multiplication $(A, v) \mapsto Av$ est transitive. le groupe d'isotropie de $e_1 = (1, ..., 0)$ est $O(n)$ où $O(n)$ est considéré comme la matrice en bloc $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ avec $B \in O(n)$, ainsi on obtient l'homomorphisme de

$$O(n+1)\text{-espaces } O(n+1)/O(n) \simeq S^n.$$

• Dans le cas complexe on a l'homomorphisme

$$U(n+1)/U(n) \cong S^{2n+1}.$$

Proposition 1.5.1. *Soit G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé de G (donc un sous-groupe de Lie par le théorème de Henri Cartan), alors $p : G \longrightarrow G/H$ est un H-fibré principal, noté $H \hookrightarrow G \longrightarrow G/H$.*
Par ailleurs, si G agit transitivement sur une variété M, pour un point $x \in M$, on note le stabilisateur $H = G_x$ qui est un sous-groupe fermé de G, alors $M \simeq G/H$ comme G-espace, i.e on a un H-fibré principal.

Définition. *Un espace X est dit simple si son groupe fondamental est abélien et agit de manière triviale sur les groupes d'homotopie d'ordre supérieur de X.*

Proposition 1.5.2. *Supposons que H soit un sous-groupe fermé connexe d'un groupe de Lie compact compact G. Ensuite, l'espace homogène G/H est un espace simple. En particulier, G lui-même est un espace simple.*

En fait, ce résultat est valable pour tout groupe topologique ou plus généralement pour tout H-espace.

Preuve : Notons l'application quotient par $q : G \to G/H$. Nous utilisons la classe trivial H comme point de base pour G/H. Soit $\alpha \in \pi_1(G/H)$, $\xi \in \pi_n(G/H)$.
Puisque H est connexe, il y a une surjection $q_\# : \pi 1(G) \to \pi_1(G/H)$, alors on choisi un $\tilde{\alpha} : I \to G$ avec $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}(1) = e$ et $q(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t)$. (L'égalité peut être obtenue puisque q satisfait la propriété de relèvement de l'homotopie) Maintenant, en utilisant l'action à gauche de G sur G/H, nous définissons une application F rendant le diagramme suivant commutatif :

$F(x,t) = \tilde{\alpha}(t)\xi(x)$. on a $F(x,0) = \xi(x)$, $F(x,1) = \xi(x)$ et

$$F(s_0,t) = \tilde{\alpha}(t)\xi(s_0) = \tilde{\alpha}(t)H = \alpha(t).$$

La dernière égalité montre que F rend le diagramme commutatif, de plus on observe que $F(-,1) = \xi$. Par conséquent $\alpha \cdot \xi = \xi$ et l'action est trivial.

Exemples. 1. Les n-tores T^n ont $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$, mais ils sont des espaces simples.

2. Les groupes orthogonaux spéciaux $\mathcal{SO}(n)$ ont leur $\pi_1(\mathcal{SO}(n)) = \mathbb{Z}/2$, mais ils sont des espaces simples.

3. L'espace projectif $\mathbb{R}P(2n)$ est connu pour ne pas être simple (c'est-à-dire que l'application antipodale sur le revêtement universel S^{2n} est de degré -l), mais nous avons $\mathbb{R}P(2n) = \mathcal{O}(2n+1)/(\mathcal{O}(2n) \times \mathcal{O}(2))$, on note que le sous-groupe H n'est pas connexe.

Remarque. Le cas spécial $H = T$, où T est un tore maximal de G, est plus facile à gérer car il y a une décomposition de Bruhat de G/T montrant qu'une structure CW pour G/T a des cellules uniquement dans des dimensions égales. Par conséquent, l'espace homogène G/T est simplement connexe.

1.6 Cohomologie équivariante

1.6.1 Définitions

Soit X un G-espace, si l'action du groupe n'est pas libre, alors le quotient X/G peut être difficile à calculer, d'où l'idée de Borel de remplacer X par le G-espace $EG \times X$ qui a le même type d'homotopie que X où G agit librement et diagonalement par :

$$g.(e,x) = (e.g^{-1}, g.x)$$

Soit $EG \longrightarrow BG$ le G-fibré universel, d'où l'espace orbite

$$X_G = EG \times_G X = (EG \times X)/G$$

est l'espace total du fibré $X \longrightarrow X_G \longrightarrow BG$ de fibre X.

Définition. *La cohomologie équivariante de* X *est* $H^*_G(X) = H^*(X_G)$

Diagramme de Borel

Comme les projections π_1 et π_2 sont équivariantes alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
EG \arrow[d] & EG \times X \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
BG & X_G \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & X/G
\end{tikzcd}$$

Soit Y un K-espace et $h\colon G \longrightarrow K$ un homomorphisme de groupes et $f\colon X \longrightarrow Y$ une application h-équivariante c'est à dire $f(g.x) = h(g).f(x)$ D'où on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
EG \arrow[dd] \arrow[dr, "E_h"] & & EG \times X \arrow[ll] \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr, "E_h \times f"] & & X \arrow[dd] \arrow[dr, "f"] & \\
& EK \arrow[dd] \arrow[dr] & & EK \times Y \arrow[ll] \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dr] & & Y \arrow[dd] \\
BG \arrow[dr, "B_h"'] & & X_G \arrow[ll] \arrow[rr] \arrow[dr, "B_h \times f"] & & X/G \arrow[dr, "\bar{f}"] & \\
& BK & & Y_K \arrow[ll] \arrow[rr] & & Y/K
\end{tikzcd}$$

Définition. *Soit $\mathfrak{C}$ la catégorie équivariante des espaces munis d'actions et d'applications entres eux, on a le foncteur suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
(G - espace) & \longmapsto & H_G^*(X) = H^*(X_G) \\
(application\, h - equivariante)\, X \xrightarrow{f} Y & \longmapsto & f_h^*\colon H_K^*(Y) \mapsto H_G^*(X).
\end{array}$$

1.6.2 Propriétés

1. Supposons que G agit librement sur X. Alors les fibres EG de $X_G = (X \times EG)/G$ sont contractile, et donc l'application $X_G \longrightarrow X/G$ est une équivalence d'homotopie. En particulier, $H_G^*(X) = H^*(X_G) \simeq H^*(X/G)$.
2. On a $pt_G = (EG \times pt)/G = EG/G = BG$,
   d'où $H^*(pt) = H^*(BG)$,

Comme $H_G^*()$ est un foncteur, d'où l'application constante $X \longrightarrow pt$ induit un homomorphisme d'anneau $H_G^*(pt) \longrightarrow H_G^*(X)$
D'où $H_G^*(X)$ est muni d'un structure de module sur l'anneau $H_G^*(pt)$.
On a :

$$H_{S^1}^*(pt, R) = H^*(pt_{S^1}, R) = H^*(BS^1, R) = H^*(CP^\infty, R) \simeq R[u]$$

avec $deg(u) = 2$,
D'où :

$$H_{(S^1)^r}^*(pt, R) = R[u_1, ..., u_r] \text{ avec } deg(u_i) = 2$$

3. Supposons que G agit trivialement sur X. alors :

$$X_G = (X \times EG)/G = X \times BG$$

et donc

$$H_G^*(X) \cong H^*(X) \otimes H^*(BG).$$

En particulier, $H_G^*(X)$ est un $H^*(BG)$-module libre.

4. Suite spectrale de Leray ;
Soit $\Bbbk$ un corps, la cohomologie équivariante peut être calculée par les termes E_∞ du suite spectrale de la fibration $X_G \longrightarrow BG$. Si BG est simplement connexe (c'est le cas pour les groupes de Lie connexe compact) alors le terme E_2 du suite spectrale est $E_2^{p,q} = H^p(BG) \otimes H^q(X)$.

CHAPITRE 2
HOMOTOPIE RATIONNELLE

2.1 Définitions

- Un espace pointé est une paire (X, x_0) où X est un espace et $x_0 \in X$
x_0 est appelé point de base de (X, x_0).
- Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces pointés. Une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est dite pointée si $f(x_0) = y_0$. Si f est pointée, on écrit : $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$.
- Soient f et g deux applications continues envoyant X vers Y.
On dit que f est homotope à g (noté par $f \sim g$) s'il existe une application continue $H : X \times I \longrightarrow Y$ telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$ $\forall x \in X$. H s'appelle une homotopie (libre) de f à g.
- On dit qu'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie s'il existe une application continue $g : Y \longrightarrow X$ telle que $gf \sim id_X$ et $fg \sim id_Y$. On dit alors que X et Y ont le même type d'homotopie.
- Si $f, g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ deux applications d'espaces pointés, alors on dit que f est homotope à g relativement à x_0 (noté par $f \underset{x_0}{\sim} g$) s'il existe une application continue $H : X \times I \longrightarrow Y$ telle que : $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ et $H(x_0, t) = y_0$ pour tous $x \in X, t \in I$. H s'appelle une homotopie relative de f à g.

On définit donc une relation d'équivalence sur les applications continues d'espaces topologiques, en particulier ceux pointés. L'ensemble quotient associé se note $[(X, *), (Y, *)]$.
- Un sous-espace U d'un espace topologique X est dit contractile dans X si l'inclusion $i \ : \ U \hookrightarrow X$ est homotope à une application constante $U \longrightarrow \{x_0\}, x_0 \in X$.

– Soit X un espace topologique (resp. $(X, *)$) :

Définir une relation d'équivalence sur X (*notée* $\sim$), est équivalent à donner une partition $\mathcal{P}$ de X.

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists A \in \mathcal{P} \diagup \ (x, y) \in A^2$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des classes.

$X \diagup \sim = \ X \diagup \mathcal{P} \ = Y$ est l'ensemble des classes $\overline{x}$ avec $x \in X$ muni de la topologie finale (appelée topologie quotient) qui rend la projection canonique

$$\pi : X \longrightarrow Y \ (resp. \pi : (X, *) \longrightarrow (Y, *)), \quad x \longmapsto \overline{x}$$

continue.

U est un ouvert de $X \diagup \sim \ \Longleftrightarrow \ \pi^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

– Soit $(X_i)_{i \in \Lambda}$ une famille d'espaces topologiques.

On définit la somme disjointe des (X_i) par :

$$\underset{i \in \Lambda}{\amalg} X_i = \underset{i \in \Lambda}{\cup} X_i \times \{i\}$$

U ouvert de $\underset{i \in \Lambda}{\amalg} X_i \ \Longleftrightarrow \ \forall i, \ U \cap (X_i \times \{i\}) = U_i \times \{i\}$ où U_i ouvert de X_i.

Si $\forall i, f_i : X_i \longrightarrow Y_i$, alors on construit

$$\underset{i \in \Lambda}{\amalg} f_i : \underset{i \in \Lambda}{\amalg} X_i \longrightarrow \underset{i \in \Lambda}{\amalg} Y_i.$$

– Soient $X_1, ..., X_n$ des espaces topologiques.

On définit $Y = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, ce produit est muni de la topologie :

U ouvert de $Y \iff \forall (x_1, ..., x_n) \in U,\ \forall 1 \leq i \leq n\ \exists$ un voisinage ouvert U_i de x_i dans X_i tels que $U_1 \times ... \times U_n \subset U$.

Si $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$, on construit

$$f_1 \times ... \times f_n : X_1 \times ... \times X_n \longrightarrow Y_1 \times ... \times Y_n.$$

− Soit A une partie d'un espace X.

On définit la relation d'équivalence $\sim$ par :

• $x \sim x$

•$x \sim y,\ \forall (x, y) \in A^2$

$X \diagup A = X \diagup \sim$: on dit qu'on collapse A.

− Soit $X = \coprod_{i \in \Lambda} X_i$.

Donner une partition $\mathcal{P}$ de X est équivalent à donner une relation d'équivalence sur X.

$X \diagup \mathcal{P}$ s'appelle le recollement des (X_i) à l'aide de $\mathcal{P}$.

− Soit $X = \coprod_{i \in \Lambda} X_i$, et soit $\mathcal{A} = \{U_{ij} \subset X_i \diagup\ (i, j) \in \Lambda^2\ et\ U_{ii} = X_i\}$ (U_{ij} sont des cartes ouvertes).

Soit $(i, j) \in \Lambda^2$.

Considérons :

$$\varphi_{ij} : U_{ij} \subset X_i \overset{continues}{\longrightarrow} U_{ji} \subset X_j$$

telles que :

(a) $\varphi_{ii} = id_{X_i}$

(b) $\varphi_{ij} (U_{ij} \cap U_{ik}) \subset U_{jk}$

(c) Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} & U_{ij} \cap U_{ik} \arrow[dl, "\varphi_{ij}"'] \arrow[dr, "\varphi_{ik}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ U_{jk} \cap U_{ji} \arrow[rr, "\varphi_{jk}"] & {} & U_{ki} \cap U_{kj} \end{tikzcd}$$

$(\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik})$

$C=\{(U_{ij},\varphi_{ij})\}$ s'appelle un cocycle. $\widetilde{X}=X/\sim$ est un recollement à l'aide des cocyles où

$$x\sim y\Longleftrightarrow x=y\ ou\ \exists i,j\in\Lambda/\ y=\varphi_{ij}\left(x\right).$$

– Soient A et B deux espaces topologiques, $S\subset A$ et $f:S\longrightarrow B$.

Soit $X=A\amalg B/\sim$ où $x\sim y\Longleftrightarrow x=y\ ou\ y=f(x)$.

X est l'attachement de A à B à l'aide de f.

– Soit X un espace topologique.

La suspension de X est donnée par :

$$\sum X=X\times I/X\times\{1\}\cup X\times\{0\}$$

Exemples :

(a) $\sum I=\mathbb{D}^2$.

(b) $\sum\{-1,1\}=\sum S^0=S^1$.

(c) $\sum S^1=S^2$.

(d) $\sum S^n=S^{n+1}$.

2.2 CW-complexes

Dans cette thèse, on suppose toujours que tout espace topologique a le même type d'homotopie d'un $CW-$complexe.

Un $CW-$complexe est un espace topologique obtenu par recollement des cellules.

Définition (Attachement d'une cellule e^n)**.** • $e^n=\{(x_1,...,x_n)/\sum x_i^2\prec 1\}$ *s'appelle une cellule de dimension n.*

• $\partial e^n=S^{n-1}=\{(x_1,...,x_n)/\ \sum x_i^2=1\}$.

L'attachement d'une cellule e^n à X à l'aide de $f:\partial e^n\longrightarrow X$ c'est l'espace quotient $X\amalg e^n/\sim\,=X\underset{f}{\amalg}e^n$ où $x\sim y\Longleftrightarrow x=y$ ou $y=f(x)$.

Définition. *Un $CW-$complexe est un espace topologique obtenu par des attachements à l'étage n des cellules de dimension $(n+1)$ à partir des cellules de dimension 0. X s'obtient de la mnière suivante :*

– *L'étage* 0 *ou le* $0-$*squelette, noté* X^0 :

$X^0 = \coprod_{i\in\Lambda} e_i^0$ *(il y a que des points).*

– *L'étage* n *ou le* $n-$ *ème squelette, noté* X^n :

$X^n = \bigcup_{i\in\Lambda_n} X^{n-1} \coprod_{f_i} e_i^n.$

– *La frontière de chacune de ses cellules est égale à la réunion disjointe d'un nombre fini d'intérieurs de cellules de dimensions plus petites.*

– X *est muni d'une structure de topologie faible, (ie) ;*

$$A \subset X \; est \; un \; fermé \iff A \cap X^n \; est \; un \; fermé \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemples. (a) $S^1 = e^0 \coprod_f e^1$ où $f : \partial e^1 = \{-1, 1\} \longrightarrow \{0\}$.

(b) Pour S^2, il y a deux façons :

$i)$ $S^2 = e^0 \coprod_f e^2$ où $f : S^1 \longrightarrow e^0$.

$ii)$ $S^2 = e^0 \amalg e^1 \amalg e_1^2 \amalg e_2^2$.

Définition. *On dit que* X *est un* $CW-$*complexe fini si pour tout squelette* X^n, Λ_n *est fini et* $\exists N \diagup \forall n \geq N,\ X^N = X^n$ *(ie)* X *s'obtient par attachement d'un nombre fini de cellules.*

X *est dit de type fini si tout squelette s'obtient par attachement d'un nombre fini de cellules.*

Définition (Invariant d'Euler-Poincaré d'un $CW-$complexe fini)**.** *On pose :* $d_n = card\Lambda_n$ *L'invariant d'Euler-Poincaré de* X *est donné par :* $\chi(X) = \sum_n d_n$.

Exemples. (a) $\chi(S^1) = 0$, car $S^1 = e^0 \coprod_f e^1$.

(b) $\chi(S^2) = 2$, car $S^2 = e^0 \coprod_f e^2$.

(c) $\chi(T^2) = 0$, car $T^2 = e^0 \amalg e^1 \amalg e^1 \amalg e^2$.

2.3 Espaces vectoriels gradués

Définitions. - *Un espace vectoriel gradué est une famille* $V = \{V^i\}_{i\geq 0}$ *de* $\mathbb{Q}$*-espaces vectoriels indexés par des entiers. Les éléments* $v \in V^i$ *sont dits de degré* i *et on note* $|v| = i$.

- *Un espace vectoriel gradué est concentré en degré* $i \in I (I \subset \mathbb{N})$ *si* $V^i = 0$ *pour tout* $i \notin I$*, on écrit alors* $V = \{V^i\}_{i \in I}$.
- *Un espace vectoriel est dit de type fini si* V^i *est de dimension finie pour tout* i.
- *Un espace vectoriel* V *est de dimension finie si* V^i *est de dimension finie pour tout* i*, et si* $V^i = 0$ *sauf pour un nombre fini de* i.

Maintenant, nous aurons besoin d'introduire quelques notations pour les espaces vectoriels gradués. On définit V^+ comme étant l'espace vectoriel gradué $V = \{V^i\}_{i \geq 1}$. De même,si $k \geq 0$, on définit $V^{\geq k}$ comme étant l'espace vectoriel gradué $V = \{V^i\}_{i \geq k}$. Les espaces vectoriels gradués $V^{>k}$, $V^{\leq k}$ et $V^{<k}$ sont définis de la même facon. On définit aussi $V^{pair} = \{V^{2i}\}_{i \geq 0}$ et $V^{impair} = \{V^{2i+1}\}_{i \geq 0}$.

Exemples. ⓘ Le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est regardé comme un espace vectoriel concentré en degré zéro.
ⓘⓘ L'homologie singulière rationnelle $H_n(X; \mathbb{Q})$ d'un espace topologique X est une suite d'espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$ et donc c'est un espace vetoriel gradué.

Remarque. Il est important de noter que l'addition dans les espaces vectoriels gradués n'est pas définie tout le temps, par exemple, étant donné un espace vectoriel gradué V, il n'y a aucune addition définie pour un élément de V^i et un élément de V^j si $i \neq j$. Il y a un point de vue alternatif où l'espace vectoriel gradué est vu comme somme directe $V = \bigoplus V^i$ (et par conséquent l'addition des vecteurs est toujours formellement définie). C'est également pourquoi les éléments de V^i sont désignés sous le nom d'éléments homogènes de degré i (contrairement à une somme formelle d'éléments de différents degrés).

Constructions de base. Les constructions typiques de l'algèbre linéaire reporte habituellement à l'algèbre linéaire graduée d'une manière naturelle.
ⓐ Un sous-espace d'un espace vetoriel gradué $U \subset V$ est un espace vetoriel

gradué $\{U^i\}_{i\geq 0}$ tel que U^i est un sous-espace de V^i pour tout $i \geq 0$.
ⓑ Etant donné un sous-espace U d'un espace vetoriel gradué, le quotient de V par U est l'espace vetoriel gradué $V \diagup U = \{V^i \diagup U^i\}_{i\geq 0}$.
ⓒ Etant donnés deux espaces vectoriels gradués V et W, la somme directe de V et W est l'espace vectoriel gradué $V \bigoplus W = \{V^i \bigoplus W^i\}_{i\geq 0}$.
ⓓ Soient deux espaces vectoriels gradués V et W, le produit tensoriel de V et W est l'espace vetoriel gradué $V \otimes W = \{ \bigoplus\limits_{j+k=i} V^j \otimes W^k\}_{i\geq 0}$.
En particulier, un élément $v \otimes w \in V^j \otimes W^k$ est de degré $|v \otimes w| = j + k$.

Définition. *Une application linéaire de degré n allant d'un espace vectoriel gradué V à un espace vectoriel gradué W est une famille d'applications linéaires :*

$$f_i \ : \ V^i \longrightarrow W^{i+n} \ \textit{pour tout } i \geq 0.$$

Définition. *Une différentielle sur un espace vectoriel gradué V est une application linéaire $d \ : \ V \longrightarrow V$ de degré 1 telle que $d_{n+1} \circ d_n = 0$ pour tout $n \geq 0$.*

Définition. *Tout espace vectoriel gradué V muni d'une différentielle d est associé à une algèbre de cohomologie $H(V,d)$ définie par $H^n(V,d) = ker\ d_n \diagup Im\ d_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ et $H^0(V,d) = ker\ d_0$. Les éléments de $ker\ d_n$ sont appelés des n-cocycles et les éléments de $Im\ d_n$ sont appelés des n-cobords.*

2.4 Algèbres graduées différentielles commutatives

Définitions. *Une algèbre graduée A est un espace vectoriel gradué muni d'une application linéaire $A \otimes A \longrightarrow A$ de degré zéro, appelée multiplication, notée par $x \otimes y \mapsto xy$, avec un élément d'identité $1 \in A^0$ tels que pour tous*

$$x, y, z \in A \ : \qquad (xy)z = x(yz) \ \textit{et} \ 1x = x1 = x$$

Un morphisme d'algèbres graduées

$$\varphi \ : \ A \longrightarrow B$$

est une application linéaire de degré zéro telles que

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

pour tout $x, y \in A$ *et* $\varphi(1) = 1$.
Une algèbre graduée A est commutative si

$$xy = (-1)^{|x||y|}yx$$

pour tout couple d'éléments homogènes $(x, y) \in A \times A$.
Une dérivation de degré k dans une algèbre graduée A est un morphisme $d \ : \ A \longrightarrow A$ *de degré k tel que :*

$$d(xy) = (dx)y + (-1)^{k|x|}xdy$$

Pour tous $x, y \in A$ *(formule de Leibniz).*

Exemple. Etant données deux algèbres A et B, le produit tensoriel $A \otimes B$ admet une structure d'algèbres graduées, en définissant la multiplication comme suit :

$$(a \otimes b).(a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|}aa' \otimes bb', \ a \in A \ et \ b \in B$$

Définitions. *Une algèbre graduée différentielle commutative (que l'on note adgc), est une algèbre graduée commutative A munie d'une différentielle*

$$d \ : \ A \longrightarrow A$$

qui est aussi une dérivation. On la note par (A, d).
Un morphisme des adgc

$$f \ : \ (A, d) \longrightarrow (B, d)$$

est un morphisme d'algèbres graduées

$$f \ : \ A \longrightarrow B \ tel \ que \ fd = df.$$

Si (A, d) est une adgc, Imd est un idéal de la sous algèbre $kerd$, il s'ensuit que sa cohomologie $H(A, d)$ est aussi une algèbre graduée commutative munie de la multiplication telle que si $a, b \in A$ deux cocycles, alors on définit $[a][b] = [ab]$.

Définition. *Un morphisme $f \;:\; (A, d) \longrightarrow (B, d)$ d'adgc est appelé quasi-isomorphisme si l'application induite en cohomologie :*

$$H(f) \;:\; H(A, d) \longrightarrow H(B, d),\;\; [x] \mapsto [f(x)]$$

est un isomorphisme, on note :

$$(A, d) \xrightarrow{\simeq} (B, d).$$

Exemple. Soient (A, d) et (B, d) deux adgc, le produit tensoriel $A \otimes B$ admet une structure d'adgc munie de la multiplication (donnée précédemment) et d'une différentielle

$$d(a \otimes b) = (da) \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes db,\;\; a \in A \text{ et } b \in B.$$

2.5 Algèbres graduées commutatives libres

Soit V un espace vectoriel gradué. L'algèbre tensorielle TV est l'espace vectoriel gradué

$$TV = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k V$$

où

$$T^0 V = \mathbb{Q},\;\; T^k V = \underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{k\ fois}\; (k \geq 1)$$

TV est une algèbre graduée. La multiplication est définie comme suit : Si $x \in T^k V$ *et* $y \in T^s V$ *alors* $xy = x \otimes y \in T^{k+s} V$. L'identité est $1 \in T^0 V$. Les éléments de $T^k V$ sont dits de longueur k.

Soit l'idéal $I \subset TV$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x$ pour tous $x, y \in V$.

Définition. *Le quotient $\Lambda V = TV/I$ est une algèbre graduée commutative, appelée l'algèbre graduée commutative libre sur V.*
On note par $\Lambda^k V$ l'image de la projection naturelle $T^k V \longrightarrow \Lambda V$, les éléments de $\Lambda^k V$ sont dits de longueur k.

Proposition 2.5.1. *Soit V un espace vectoriel gradué et A une algèbre graduée commutative.*
(a) Toute application linéaire $V \longrightarrow V$ de degré k s'étend à une unique dérivation $\Lambda V \longrightarrow \Lambda V$ de degré k.
(b) Toute application linéaire $V \longrightarrow A$ de degré 0 s'étend à un unique morphisme d'algèbres graduées commutatives $\Lambda V \longrightarrow A$.

Remarques. (a) $\Lambda^k V$ signifie les éléments de longeur k, et $(\Lambda V)^k$ signifie les éléments de degré k.
(b) On écrit souvent $\Lambda(a_1, a_2, ...)$ au lieu de ΛV si $\{a_1, a_2, ...\}$ est une base de V.
(c) Soit $a \in V$. Si k est impair, alors $a^2 = 0$, car ceci découle de la commutativité de ΛV. En effet ; $a^2 = (-1)^{k^2} a^2 = -a^2$. Donc $2a^2 = 0$, et par conséquent $a^2 = 0$.
(d) Si V et W sont deux espaces vectoriels gradués, alors il existe un isomorphisme canonique d'algèbres graduées commutatives $\Lambda(V \bigoplus W) \cong \Lambda V \otimes \Lambda W$.
(e) Soient $V^{pair} = \{V^{2n}\}_{n \geq 0}$ et $V^{impair} = \{V^{2n+1}\}_{n \geq 0}$.
Il s'ensuit que

$$\Lambda V \cong Sym(V^{pair}) \otimes Ext(V^{impair}) \text{ où } Sym(V^{pair})$$

est l'algèbre symétrique sur V^{pair}, et $Ext(V^{impair})$ est l'algèbre extérieure sur V^{impair}.

Remarque (La différentielle sur ΛV)**.** S'il existe une différentielle d définie sur ΛV, alors d est complètement caractérisée par ses valeur sur V. En effet ;

la restriction de d à V est une application linéaire $V \longrightarrow \Lambda V$ de degré 1, donc elle s'étend uniquement à une dérivation $\Lambda V \longrightarrow \Lambda V$ de degré 1 (par la proposition précédente) déterminant les valeurs de d sur ΛV.

Définition. *Si une telle application d existe, on appelle* $(\Lambda V, d)$ *l'adgc libre sur V, de différentielle d.*

Remarque. Ce n'est pas vrai que toute application linéaire $d \; : \; V \longrightarrow \Lambda V$ de degré 1 s'étend à une différentielle sur ΛV. Il est nécessaire de vérifier que l'extension

$$d \; : \; \Lambda V \longrightarrow \Lambda V$$

satisfait $d^2 = 0$. Cependant, il est façile de voir que si d est une dérivation de degré impair, d^2 est une dérivation de degré pair, et donc on a seulement besoin de vérifier que $d^2 = 0$ sur V. Si $(\Lambda V, d)$ est une adgc libre, alors la différentielle d s'écrit toujours comme une somme

$$d = d_0 + d_1 + d_2 + ...$$

de dérivations d_i de degré 1, où d_i augmente la longueur d'un mot par exactement i. Si on restreind d_i à $\Lambda^k V$, ceci donne lieu aux applications linéaires

$$d_i \; : \; \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k+i} V.$$

Définition. *Soit* $(\Lambda V, d)$ *une adgc libre, alors* d_0 *s'appelle la partie linéaire de la différentielle et* d_1 *est la partie quadratique de d. On dit qu'une adgc libre* $(\Lambda V, d)$ *est quadratique si* $d = d_1$.

Exemple. On considère l'espace vectoriel gradué V de base $\{a, b\}$ telle $a \in V^2$ et $b \in V^5$. On définit maintenant une application linéaire d (de degré 1) par da=0 et db=a^3. Il s'ensuit que d s'étend uniquement à une dérivation

$$d \; : \; \Lambda V \longrightarrow \Lambda V.$$

Comme $d(da) = d(db) = 0$, on déduit que $d^2 = 0$ sur ΛV (règle du produit de Leibniz). Et donc d est une différentielle sur ΛV, ainsi $(\Lambda V, d)$ est une adgc libre. On a : $b^2 = 0$, car $|b| = 5$. Donc, la base de $(\Lambda V, d)$ est de la forme : 1, a, b, ab, a^2, a^2b, a^3, a^3b, a^4, a^4b,....
La différentielle de ces éléments sont calculés en utilisant la règle du produit de Leibniz. On obtient ainsi ;

$$d(1) = 0,\ db = a^3,\ da = 0,\ d(ab) = a^4,\ da^2 = 0,\ d(a^2b) = a^5,\ da^3 = 0,$$
$$d(a^3b) = a^6,\ da^4 = 0,\ d(a^4b) = a^7,\ ....$$

On voit que a et a^2 sont des cocycles qui ne sont pas des cobords, mais a^n est un cobord pour tout $n \geq 3$ puisque d($a^{n-3}b$)=a^n. De plus, l'unité $1 \in \Lambda(a, b)$ est toujours un cocycle qui n'est pas un cobord.
Et par conséquent :

$$H(\Lambda(a, b), d) = \mathbb{Q}.[1] \bigoplus \mathbb{Q}.[a] \bigoplus \mathbb{Q}.[a^2].$$

2.6 Les modèles de Sullivan

Maitenant, nous introduisons l'un des concepts les plus importants dans la théorie d'homotopie rationnelle, la notion d'algèbre de Sullivan (ou modèle de Sullivan)

Définition. *Une algèbre de Sullivan est une adgc libre* $(\Lambda V, d)$ *telle que :*
(a) $V = \{V^i\}_{i\geq 1}$.
(b) $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V(k)$, *où* $V(0) \subset V(1) \subset ....$ *est une suite croissante de sous-espaces gradués tels que :*

$$d/V(0) = 0 \ et\ d\ :\ V(k) \longrightarrow \Lambda V(k-1),\ k \geq 1$$

Une algèbre de sullivan est minimale si $dV \subset \Lambda^{\geq 2}V$.

Remarques. (1) Si $V^0 = V^1 = 0$ et $dV \subset \Lambda^{\geq 2}V$, alors $(\Lambda V, d)$ est toujours une algèbre minimale de Sullivan. En effet ; on définit $V(k) = V^{\leq k}$. d augmente la longueur du mot par au moins 1 (et le degré par 1), et tout élément de V est de degré au moins 2, donc

$$d(V^{\leq k}) \subset \Lambda(V^{\leq k-1}).$$

Ainsi, (b) est satisfaite.
(2) Une algèbre de Sullivan est minimale si et seulement si $d_0 = 0$, où d_0 est la partie linéaire de d.

Exemple. L'algèbre $(\Lambda(x, y, z), d)$ avec $|x| = |y| = |z| = 1$ et $dx = yz,\ dy = zx,\ et\ dz = xy$ n'est pas de Sullivan, car la condition (b) n'est pas satisfaite.

Exemple. L'algèbre $(\Lambda(x, y), d)$ avec $|x| = 2,\ |y| = 5$ et $dx = 0,\ et\ dy = x^3$ est un exemple d'algèbre minimale de Sullivan.

Exemple (La partie quadratique d'une algèbre minimale de Sullivan)**.** Si $(\Lambda V, d)$ est une algèbre minimale de Sullivan, alors $(\Lambda V, d_1)$ l'est aussi. En effet ; la différentielle d se décompose comme $d = d_1 + d_2 + d_3 + ...$ (car la minimalité entraîne $d_0 = 0$). Comme d_1 augmente la longueur d'un mot par 1, il s'ensuit que d_1^2 augmente la longueur d'un mot par 2. On a :

$$d^2 = d_1^2 + \sum_{k\geq 2} d_i^2 + 2\sum_{i\neq j} d_i d_j.$$

On voit que $d^2 - d_1^2$ augmente la longueur d'un mot par au moins 3, car $\sum_{i\neq j} d_i d_j \in \Lambda^{\geq 3}$. Puisque $d^2 = 0$, alors $d_1^2 = 0$ car d_1^2 ne peut pas augmenter à la fois la longueur d'un mot par 2 (exactement) et par au moins 3. Et par conséquent, si $(\Lambda V, d)$ est minimale, la partie quadratique d_1 de d est une différentielle. Clairement, $(\Lambda V, d_1)$ est une algèbre minimale de Sullivan.

Une propriètè très importante sur les algèbres de Sullivan est la suivante : Pour toute agdc avec $H^0(A, d) = \mathbb{Q}$, il existe une algèbre minimale de Sullivan reliant (A, d) par un quasi-isomorphisme.

Définition. *Soit (A, d) une adgc. Un modèle de Sullivan de (A, d) est un quasi-isomorphisme $m\ :\ (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A, d)$ partant d'une algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$.*

Remarque. Même si un modèle de Sullivan est une application

$$m\ :\ (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A, d),$$

on se réfère à $(\Lambda V, d)$ comme étant le modèle de Sullivan, par abus de notation, tant qu'il n'y a pas de confusion.

Exemple (construction d'un modèle de Sullivan d'une adgc)**.** On considère la cohomologie du plan projectif complexe

$$(H^*(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Q}), 0) = (A, d)$$

comme une adgc munie d'une différentielle nulle. Rappelons que :

$$H^*(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^3)$$

avec

$$x \in H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Q}).$$

Ceci nous donne :

$$A^0 = \mathbb{Q}.1, \ A^2 = \mathbb{Q}.x, \ A^4 = \mathbb{Q}.x^2, \ A^i = 0$$

pour tout $i \neq 0, 2, 4 et d = 0$.
La construction de $(\Lambda V, d)$:
On introduit deux générateurs a et b de V tels que :

$$|a| = 2 \ et \ |b| = 5 \text{ avec } da = 0, \ db = a^3.$$

On définit une algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d) = (\Lambda(a, b), d)$.
On définit ensuite un modèle de Sullivan $m \ : \ (\Lambda(a, b), d) \longrightarrow (A, d)$ par : $m(a) = x \ et \ m(b) = 0$. On montre que m est un quasi-isomorphisme.
(1) m est un morphisme d'adgc :
il suffit de vérifier que

$$m(da) = dm(a) \ et \ m(db) = dm(b).$$

On a

$$m(da) = m(0) = 0 = dx = dm(a)$$

et

$$m(db) = m(a^3) = (m(a))^3 = x^3 = 0 = dm(b).$$

(2) m est un quasi-isomorphisme :
On a déjà trouvé les générateurs de $H^*(\Lambda V, d)$ qui sont $1,\ [a],\ et\ [a^2]$, de plus, on a

$$H(m)(1) = 1,\ H(m)([a]) = [m(a)] = x$$
$$\text{et } H(m)([a^2]) = [m(a^2)] = x^2.$$

D'où $H(m)$ envoie une base à une base. Ainsi $H(m)$ est un isomorphisme.

2.7 Théorie de l'homotopie rationnelle

L'homotopie rationnelle est l'étude des invariants des espaces topologiques, qui ne dépendent que du type d'homotopie de ces espaces. Un des avantages principaux de cette théorie est que l'on peut associer, à un espace, un objet algèbrique (une adgc) qui encode complètement le type d'homotopie rationnelle de cet espace.
Dans cette section, nous expliquons brièvement quelques aspects de cette théorie, et nous en donnons les résultats utilisés dans ce travail.

Définition. *On dit qu'un espace topologique simplement connexe X est rationnel si ses groupes d'homotopie $\pi_*(X)$ sont des $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels.*

Une remarque à propos de cette définition, concernant la signification d'un groupe qui devient un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel.
D'abord, puisque X est simplement connexe et les groupes d'homotopie supérieurs ($n \geq 2$) sont toujours commutatifs, il en résulte que ces groupes sont abéliens en chaque degré.
Un espace vectoriel n'est pas si différent d'un groupe abélien dans le sens

que si nous oublions la multiplication scalaire, un espace vectoriel avec son addition est un grouoe abélien. Par conséquent, un groupe abélien manque simplement une multiplication scalaire par des nombres rationnels (satisfaisant les axiomes d'espaces vectoriels) pour devenir un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel.
Comme il se trouve, un groupe abélien G admet une structure d'un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel si et seulement si G est divisible et sans torsion. Dans ce cas, la multiplication scalaire par des rationnels est uniquement déterminée.
En outre, tensoriser un groupe abélien G par $\mathbb{Q}$ tue la torsion dans G. En effet ; le produit tensoriel $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est toujours sans torsion et divisible (où $\otimes_{\mathbb{Z}}$ désigne le produit tensoriel de $\mathbb{Z}$-modules).
Il résulte des remarques ci-dessus que si X est rationnel, alors $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_*(X)$.

Définition. *Une rationalisation de X est une application continue $\varphi : X \longrightarrow Y$ où Y est simplement connexe et rationnel, telle que :*

$$\pi_n(\varphi) \otimes \mathbb{Q} \; : \; \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_n(Y) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_n(Y)$$

est un isomorphisme pour tout $n \geq 1$.

Remarque. Tout espace simplement connexe admet une rationalisation (ou bien un rationalisé).

Théorème 2.7.1. *Si X est simplement connexe, alors il existe un CW-complexe relatif $(X_{\mathbb{Q}}, X)$, ne contenant ni 0-cellules ni 1-cellules, tel que l'inclusion $\varphi : X \longrightarrow X_{\mathbb{Q}}$ est une rationalisation. De plus, étant donnée une application continue $f : X \longrightarrow Z$, avec Z un espace simplement connexe et rationnel, il existe une application $\widetilde{f} : X_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Z$ rendant le diagramme suivant commutatif.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Z \\ & X_{\mathbb{Q}} \arrow[u, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

La construction du rationalisé $X_{\mathbb{Q}}$ d'un espace X est dûe à Sullivan [32] (inspiré par Serre [27]).

Définition. *Le type d'homotopie rationnelle d'un espace X simplement connexe est le type d'homotopie de son rationalisé $X_{\mathbb{Q}}$. Si X et Y sont deux espaces simplement connexes qui ont le même type d'homotopie rationnelle, on écrit $X \simeq_{\mathbb{Q}} Y$. "$\simeq_{\mathbb{Q}}$" est une relation d'équivalence, appelé équivalence d'homotopie rationnelle.*

Proposition 2.7.1. *Tous les rationalisés de X ont le même type d'homotopie.*

Démonstration. Si $\varphi : X \longrightarrow X_{\mathbb{Q}}$ *et* $\varphi' : X \longrightarrow X'_{\mathbb{Q}}$ sont deux rationalisations de X, alors par le théorème précédent, il existe une application continue $f : X_{\mathbb{Q}} \longrightarrow X'_{\mathbb{Q}}$ telle que : $f \circ \varphi = \varphi'$. Ensuite, en utilisant la fonctorialité de π_n et le produit tensoriel, on obtient

$$(\pi_n(f) \otimes \mathbb{Q}) \circ (\pi_n(\varphi) \otimes \mathbb{Q}) = \pi_n(\varphi') \otimes \mathbb{Q}.$$

Comme $\pi_n(\varphi) \otimes \mathbb{Q}$ *et* $\pi_n(\varphi') \otimes \mathbb{Q}$ sont des isomorphismes, alors nécessairement $\pi_n(f) \otimes \mathbb{Q}$ doit être un isomorphisme. Ce qui entraîne que $\pi_n(f)$ l'est aussi, puisque $X_{\mathbb{Q}}$ *et* $X'_{\mathbb{Q}}$ sont des espaces rationnels, et donc

$$\pi_n(X_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_n(X_{\mathbb{Q}}) \text{ et } \pi_n(X'_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_n(X'_{\mathbb{Q}}).$$

Et par suite, on conclut que $X_{\mathbb{Q}}$ *et* $X'_{\mathbb{Q}}$ ont le même type d'homotopie, selon le théorème de Whitehead. □

2.8 De la topologie à l'algèbre

Dans cette partie, nous allons expliquer la transition des espaces topologiques aux adgc, de sorte que nous pouvons utiliser des outils algébriques.
On désigne par TOP la catégorie des espaces et applications continues, et par $ADGC_{\mathbb{Q}}$ la catégorie des adgc sur $\mathbb{Q}$ et morphismes des adgc.
Etant donné un espace X, on peut construire une adgc $\mathcal{A}_{PL}(X)$, appelée l'algèbre différentielle graduée commutative des formes linéaires de De Rham

sur X. De plus, si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue, alors il existe un morphisme de adgc $\mathcal{A}_{PL}(f) : \mathcal{A}_{PL}(Y) \longrightarrow \mathcal{A}_{PL}(X)$. Ceci s'étend à $\mathcal{A}_{PL} : TOP \longrightarrow ADGC_{\mathbb{Q}}$.
La construction de $\mathcal{A}_{PL}$ est dûe à Sullivan [32].
L'idée derrière la construction de $\mathcal{A}_{PL}(X)$ d'un espace X est inspirée par la construction du complexe de De Rham des formes lisses sur une variété M. En effet, supposons que M est une variété lisse. Soit $\sigma : \Delta^k \longrightarrow M$ un $k-$simplexe (lisse) et soit $\omega \in \Omega^l(M)$ une forme différentielle (lisse) de degré l sur M. Si $\sigma_j : \Delta^{k-1} \longrightarrow \Delta^k$ est le j^{me} face de σ, alors il existe une collection de formes lisses sur Δ^{k-1}, à savoir $\sigma_j^*\sigma^*\omega$ pour tout j. La construction de $\mathcal{A}_{PL}$ est analogue à celle-ci, en ce sens que si X est un espace topologique, alors les éléments de $\mathcal{A}_{PL}(X)^l$ sont des fonctions qui attribuent à chaque $k-$simplexe singulier de X une $l-$forme linéaire sur $\Delta^k,\ k \geq 0$.
les détails de la construction de $\mathcal{A}_{PL}$ sont trouvés dans le chapitre 2 de [10].
Le foncteur $\mathcal{A}_{PL}$ a la propriété importante suivante :

Théorème 2.8.1. *(voir [10]) Pour tout espace X, la cohomologie de $\mathcal{A}_{PL}(X)$ est isomorphe à la cohomologie singulière rationnelle de X, (ie) : $H^*(X;\mathbb{Q}) \cong H(\mathcal{A}_{PL}(X))$.*
Inversement, il existe un foncteur (contravariant) appelé réalisation spatiale :

$$\langle \quad \rangle : ADGC_{\mathbb{Q}} \longrightarrow CW-complexes$$

Il est obtenu par composition du foncteur de réalisation simplicial de Sullivan "$ADGC_{\mathbb{Q}} \to Ensembles\ simpliciaux$" (introduit dans [32]) avec le foncteur de réalisation de Milnor "$Ensembles\ simpliciaux \to CW-complexes$" (introduit dans [20], voir aussi le chapitre III de [19]). Le foncteur possède les deux propriétés suivantes :

Théorème 2.8.2. *Soit $(\Lambda V, d)$ une algèbre de Sullivan $1-$connexe de type fini, alors il existe toujours un quasi-isomorphisme*

$$m : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}_{PL}(\langle(\Lambda V, d)\rangle)$$

De plus, pour tout $n \geq 1$, il existe un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels :

$$\pi_n(\langle(\Lambda V, d)\rangle) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(V^n, \mathbb{Q}).$$

Lorsqu'on se restreint aux espaces qui sont des $CW-$complexes simplement connexes tels que leurs homologies rationnelles soient de type fini, et aux algèbres de Sullivan $1-$connexes de type fini, alors ces deux foncteurs (combinés) donnent lieu à la correspondance bijective suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} types\ d'homotopie\ rationnelle \\ \ des\ CW-complexes\ X \\ \ simplement\ connexes\ tels \\ \ que\ H^*(X;\mathbb{Q}) \\ soient\ de\ type\ fini \end{array}\right\} \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} classes\ d'isomorphismes \\ des\ \mathbb{Q}-alg\grave{e}bres \\ de\ Sullivan\ minimales\ telles \\ \ qu'elles\ soient\ 1-connexes \\ de\ type\ fini \end{array}\right\}$$

La puissance de la théorie d'homotopie rationnelle réside précisément dans la bijection ci-dessous. Elle réduit tous les calculs topologiques dans la théorie d'homotopie rationnelle à des calculs sur un objet algébrique, qui est l'algèbre minimale de Sullivan.
Aprés avoir introduit le foncteur $\mathcal{A}_{PL}$, nous pouvons maintenant faire la définition cruciale que rapportent les algèbres de Sullivan aux espaces topologiques.

Définition. *Un modèle de Sullivan d'un espace X connexe par arcs est un modèle de Sullivan de l'adgc $\mathcal{A}_{PL}(X)$, en d'autres termes, il est un quasi-isomorphisme $m\ :\ (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}_{PL}(X)$ pour une certaine algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$.*

Remarques. (i) Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle de Sullivan de X, alors le théorème 3.6.1 implique que $H(\Lambda V, d) \cong H^*(X;\mathbb{Q})$.
(ii) Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle de Sullivan de X tel que X est simplement connexe, alors le théorème 2.8.2 implique que $Hom_{\mathbb{Z}}(V^n, \mathbb{Q}) \cong \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}$.

Exemple (Le modèle minimal de Sullivan de $\mathbb{C}P^n$)**.** On sait que

$$H(\mathcal{A}_{PL}(\mathbb{C}P^n)) \cong H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^{n+1}).$$

avec x est de degré 2. Il existe donc $\alpha \in (\mathcal{A}_{PL}(\mathbb{C}P^n))^2$ *et* $\beta \in (\mathcal{A}_{PL}(\mathbb{C}P^n))^{2n+1}$ tels que $x = [\alpha]$ *et* $d\beta = \alpha^{n+1}$.
On définit $(\Lambda V, d)$ en introduisant deux générateurs de V, a *et* b tels que $a \in V^2$ *et* $b \in V^{2n+1}$ avec $da = 0$, *et* $db = a^{n+1}$. Il en découle que l'application $m : (\Lambda(a,b),d) \longrightarrow \mathcal{A}_{PL}(\mathbb{C}P^n)$ définie par : $m(a) = \alpha$ *et* $m(b) = \beta$ est un quasi-isomorphisme.
Ainsi, m est le modèle minimal de Sullivan de $\mathbb{C}P^n$.

2.9 Le modèle minimal de Hirsch-Brown

Le modèle minimal de Hirsch-Brown est donné par :

$$H^*(X,k) \tilde{\otimes} H^*(\mathbf{B}G,k)$$

où le produit tensoriel comporte une différentielle tordue et le groupe G est soit le cercle S^1 ou le tore $G = Z_2$. on travaillera en caractéristique 0. Ce modèle capture l'information sur la construction de Borel et peut être comparé à la suite spectrale de Leray-Serre de la fibration $X \hookrightarrow X_G \to BG$ il correspond au modèle de Sullivan en homotopie rationnelle. On cite le fameux théorème :

Théorème 2.9.1. ***Hsiang***
Soit G un groupe de Lie compact qui agit d'une façon continue sur X. Alors G agit presque librement si et seulement si $H^*_G(X,\mathrm{Q})$ est de dimension fini

Si G agit presque librement, on a une équivalence d'homotopie faible $X/G \simeq X_G$ et

$$H^*(X_G,k) \cong H(H^*(X,k) \tilde{\otimes} H^*(\mathbf{B}G,k)) \cong H^*(X/G,k)$$

2.9.1 Construction du complexe de Koszul

Soit R un anneau commutatif et E un R-module libre de rang fini r. On désigne par $\Lambda^i E$ la-ième puissance extérieure de E.

Définition. *Soit l'application R-linéaire $s\colon E \to R$*
Le complexe de Koszul associé à s est le complexe de chaînes de R-modules définit comme suit :

$$K_*(s)\colon 0 \longrightarrow \Lambda^r E \xrightarrow{d_r} \Lambda^{r-1}E \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Lambda^1 E \xrightarrow{d_1} R \to 0$$

Où les différentielles d_k sont données par : pour tout $e_i \in E$

$$d_k(e_1 \wedge \ldots \wedge e_k) = \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1} s(e_i)\, e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e_i} \wedge \ldots \wedge e_k$$

où $\widehat{.}$ signifie que le terme est omit.
On a $d_k \circ d_{k+1} = 0 \quad , \wedge^1 E = E \quad , d_1 = s \quad , \wedge^r E \simeq R$

• Si $E = R^r$ (On choisit une base) alors donner une application R-linéaire $s\colon R^r \to R$ c'est donner une suite finie $s_1, \ldots, s_r$ d'éléments de R et on pose $K_*(s) = K_*(s_1, \ldots, s_r)$
• Si M est un R-module de type fini alors on pose $K_*(s, M) = K_*(s) \otimes M$ qui est un complexe de chaîne avec la différentielle induite : $(d \otimes 1_M)(v \otimes m) = dv \otimes m$
La iéme homologie du complexe de Koszul est : $H_i(K_*(s, M)) = Ker(d_i \otimes 1_M)/im(d_{i+1} \otimes 1_M)$
par exemple si $E = R^r$ et $s = [s_1, \ldots, s_r]$ un vecteur ligne d'éléments dans R alors $d_1 \otimes 1_M$ est

$$\begin{array}{rccc} s\colon & M^r & \to & M \\ & (m_1, \ldots, m_r) & \mapsto & s_1 m_1 + \ldots + s_r m_r \end{array}$$

et

$$H_0(K_*(s,M)) = M/(s_1,...,s_r)M = R/(s_1,...,s_r)\otimes_R M$$

$$H_r(K_*(s,M)) = \{m\in M : s_1m = ... = s_rm = 0\} = \\ Hom_R(R/(s_1,...,s_r)\otimes M)$$

• De manière duale, on pose $K^*(s,M) = Hom_R(K_*(s),M)$ c'est un complexe de cochaîne concentré entre le degré 0 et r, la ième cohomologie de ce complexe $H^i(K^*(s,M)$ est notée $H^i(s,M)$

2.9.2 Propriétés du complexe de Koszul

Soit E un R-module libre de type fini, $s\colon E\to R$ une application R-linéaire et $t\in R$
Soit $K(s,t)$ le complexe de Koszul de l'application $(s,t)\colon E\otimes R\to R$
Soit M un R-module de type fini, comme $\Lambda^k(E\oplus R) = \oplus_{i=0}^k\left(\Lambda^{k-i}E\otimes\Lambda^iR\right) = \Lambda^kE\oplus\Lambda^{k-1}E$
Ainsi on obtient la suite exacte de complexe de chaînes

$$0\longrightarrow K(s,M)\longrightarrow K(s,t;M)\longrightarrow K(s,M)[-1]\longrightarrow 0$$

où $[-1]$ signifie que le degré est décalé par -1, et $d_{K(s)[-1]} = -d_{K(s)}$
On note que $\forall(x,y)\in\Lambda^kE\oplus\Lambda^{k-1}E :\qquad d_{K(s,t)}((x,y)) = (d_{K(s)}x+ty, d_{K(s)[-1]}y)$
$K(s,t)$ est le mapping cone de $t\colon K(s)[-1]\longrightarrow K(s)$
Ainsi nous obtenons la suite longue en homologie :

$$...\longrightarrow H_i(K(s,M))\xrightarrow{t} H_i(K(s,M))\longrightarrow H_i(K(s,t;M))\longrightarrow H_{i-1}(K(s,M))\xrightarrow{t} ...$$

Avec l'homomorphisme de connexion

$$\delta\colon H_{i+1}(K(s;M)[-1]) = H_i(K(s;M))\xrightarrow{t} H_i(K(s;M))$$

En effet $\delta([x]) = [d_{K(s,t)}(y)]$ où $y\in K(s,t)$ d'image x et comme $K(s,t)$ est somme directe, on peut prendre $y=(0,x)$ d'où $\delta([x]) = t[x]$

Théorème 2.9.2. *Soit R un anneau, M un R module de type fini*
Si la suite $(x_1, x_2, ..., x_r)$ d'éléments de R est M-régulière alors :
$\forall i \geq 1 \qquad H_i(K(x_1, x_2, ..., x_r) \otimes M) = 0$
En particulier si $M = R$ alors la suite :

$$0 \longrightarrow \Lambda^r R^r \xrightarrow{d_r} \Lambda^{r-1} R^r \longrightarrow ... \longrightarrow \Lambda^2 R^r \xrightarrow{d_2} R^r \overset{[x_1,...,x_r]}{\longrightarrow} R/(x_1, x_2, ..., x_r) \longrightarrow 0$$

est exacte c-à-d $K(x_1, x_2, ..., x_r)$ est une R-résolution libre de $R/(x_1, x_2, ..., x_r)$

Démonstration. Par récurrence sur r
si $r = 1$ alors $H_1(K(x_1), M) = Ann_M(x_1) = 0$
Supposons l'assertion vraie pour $r - 1$
On a $H_i(K(x_1, x_2, ..., x_r), M) = 0 \qquad \forall i \geq 2$
comme x_r n'est pas un diviseur de zéro sur $H_1(K(x_1, x_2, ..., x_{r-1}), M) = M/(x_1, x_2, ..., x_{r-1})M$
Alors a $H_1(K(x_1, x_2, ..., x_r), M) = 0$ □

Corollaire. *Soit R et M comme au-dessus, et soit $x_1, x_2, ..., x_r$ une suite d'éléments de R. supposons qu'ils existent un anneau S, une suite S-régulière $y_1, y_2, ..., y_r$ et un homomorphisme d'anneau* $\begin{array}{ccc} S & \rightarrow & R \\ y_i & \mapsto & x_i \end{array}$
alors $H_i(K(x_1, x_2, ..., x_r) \otimes_R M) = Tor_i^S(S/(y_1, y_2, ..., y_r), M)$
où Tor est le foncteur TOR et M est un S-module via $S \longrightarrow R$

Corollaire. *Soit R et M comme au-dessus, et soit $x_1, x_2, ..., x_r$ une suite d'éléments de R. alors*
l'idéal $I = (x_1, x_2, ..., x_r)$ et l'annulateur de M annulent $H_i(K(x_1, x_2, ..., x_r), M) = 0 \quad \forall i$

2.9.3 Liens entre le complexe de Kozul et Le modéle de Hirsch-Brown

les outils essentiels pour lier entre le complexe de Kozul et Le modéle de Hirsch-Brown sont fourni par les deux lemmes suivants :

On considère le complexe libre de cochaîne $\widetilde{C}$ sur R avec une augmentation $\varepsilon\colon \widetilde{C} \to k$ qui induit une surjection en cohomologie.

Lemme. *Soit $\widetilde{C}$ comme en dessus et supposons que $H^{>m}(\widetilde{C}) = 0$ alors il existe un morphisme de R-complexe $\alpha\colon K_n(m) \longrightarrow \widetilde{C}$ tel que*

$$H^*(\varepsilon)H^*(\alpha)\colon H(K_n(m) = R/(t_1^{m+1}, ..., t_n^{m+1}) \to k \tag{6}$$

est la projection canonique

On suppose que $\widetilde{C}$ admet une filtration$F_*(\widetilde{C})$qui satisfait :
• il existe des inclusions propres de souscomplexes libres

$$F_0(\widetilde{C}) = 0 \subseteq F_1(\widetilde{C}) \subseteq ... \subseteq F_{l(F_*(\widetilde{C}))}(\widetilde{C}) = \widetilde{C}$$

qui sont en somme directe en tant que R-modules et
• $\widetilde{d}(F_i(\widetilde{C}) \subseteq F_{i-1}(\widetilde{C})$ pour $i = 0, ..., l(F_*(\widetilde{C}))$
où $l(F_*(\widetilde{C}))$est la longueur de la filtration

Lemme. *il existe un morphisme de R-modules qui préserve la filtration $\beta\colon \widetilde{C} \to K_n(m)$ qui commute avec les augmentations respectives*

On applique ces deux lemmes au modèle de Hirsh-brown de dessus
D'après le théorème et l'isomorphisme (6), on obtient que la cohomologie du modèle de Hirsh-Brown s'annule en dessus de la dimension formelle $m := dimX/G$ de l'espace des orbites
Ainsi on obtient un morphisme unitaire

$$\beta \circ \alpha\colon K_n(m) \longrightarrow K_n(0)$$

qui se factorise à travers le modèle minimal de Hirsh-Brown.

CHAPITRE 3
ACTION DU TORE ET CONJECTURE DU RANG TORIQUE

3.1 Définitions et résultats

Un groupe topologique G agit sur un espace X s'il existe une application continue $\varphi : G \times X \to X$ satisfaisant $ex = x$ et $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$. Ici, nous avons adopté la convention de notation habituelle $gx = \varphi(g, x)$. Lorsque G est un groupe de Lie (ce que nous devrons prendre pour être compact sauf indication contraire) et M est une variété, l'action est lisse si φ est une application lisse. La variété M est alors appelée une G-Variété. Le sous-groupe $G_x = \{g|gx = x\}$ s'appelle le sous groupes isotrope au point x. L'orbite de x est $G(x) = \{gx|g \in G\}$.

Notons que les sous-groupes d'isotropie correspondant aux points dans la même orbite $G(x)$ sont conjugués parce que $G_{gx} = gG_xg^{-1}$. L'application canonique $f : G/G_x \to G(x)$ induite par l'action sur x est clairement un difféomorphisme.

Nous pouvons considérer l'ensemble des orbites comme un espace topologique en prenant l'espace de quotient défini par la relation d'équivalence suivante sur M : $x \sim y$ si et seulement s'il existe des $g \in G$ avec $gx = y$.

Cet espace des orbites est noté M/G. Un point $x \in M$ est un point fixe par l'action de G si $G_x = G$; C'est-à-dire $gx = x$ pour tout $g \in G$. L'ensemble des points fixes sous l'action de G sur M est désigné par M^G. Une action est libre si $G_x = \{e\}$ pour tout $x \in M$ et est presque libre si G_x est un groupe fini pour tout $x \in M$.

Exemple. Soit le cercle $G = S^1$ qui agit par rotations horizontales sur la sphère $M = S^2$. L'ensemble de points fixes M^G est l'union des pôles Nord et Sud, L'espace de l'orbite M/G est un demi-cercle reliant les pôles, les sous-groupes d'isotropie sont G aux pôles fixes et le groupe trivial $\{e\}$. Notons que dans ce cas, M/G n'est pas une variété fermée, mais plutôt une variété avec frontière.

Les propriétés de base des actions des groupes de Lie qui nous intéressent sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 3.1.1. *Si G est un groupe de Lie compact et M une G-variété compacte et lisse, Alors :*

1. $G(x)$ est une sous-variété de M, et l'action de G induit un difféomorphism $G/G_x \to G(x)$.

2. A isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de groupes d'isotropie. Par conséquent, il existe seulement un nombre fini de types d'orbites.

3. L'ensemble des points fixes M^G est une sous-variété compacte éventuellement non connexe de M dont les composantes connexes peuvent avoir des dimensions différentes.

4. Si l'action est libre, alors M/G est une variété et la projection $M \to M/G$ est un G-fibré principal.

Le lemme suivant nous permettra de réduire l'étude des ensembles fixes d'actions de tore à l'étude d'ensembles fixes d'actions circulaires.

Lemme. *Soit $T = (S^1)^r$ un tore agissant de manière lisse sur une variété compacte M. Alors, il existe un cercle $S^1 \subseteq T$ tel que $M^{S^1} = M^T$.*

Démonstration. ([10, lem7.3]) $\square$

3.2 La fibration de Borel

Rappelons que pour tout groupe de Lie compact G il existe un G-fibré principal
$$G \to EG \to BG.$$
L'espace BG, appelé l'espace classifiant de G, est égale à EG/G où EG est un espace contractible ayant une action libre de G.

Exemple. L'action du cercle sur $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est donnée par la multiplication complexe $z(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (zz_1, \ldots, zz_{n+1})$. Le quotient est l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P(n)$. Soit S^∞ la limite directe des inclusions $S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset \ldots \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S^i = S^\infty$.

Maintenant, on sait que les groupes d'homotopie se comportent bien sous les limites directes : $\lim_j \pi_k(S^j) = \pi_k(\ lim_j(S^j))$. Donc $\pi_k(S^\infty) = 0$ pour tout k en effet, S^∞ est contractible. Clairement S^∞ est également obtenu en prenant la limite directe $S^3 \subset S^5 \ldots \subset \cup S^{2p+1} = S^\infty$. Les actions libres de S^1 sur les sphères impaires sont compatibles avec les inclusions, donc ils induisent une action libre de S^1 sur S^∞. Puisque S^∞ est contractible, donc ES^1 l'est aussi, et le S^1-fibré $S^\infty \to \mathbb{C}\mathrm{P}(\infty)$ n'est autre que le S^1-fibré universel $ES^1 \to BS^1$. En multipliant les différentes copies du fibré universel $S^\infty \to \mathbb{C}\mathrm{P}(\infty)$, nous obtenons l'espace classifiant de d'un r-tore, $BT^r = (\mathbb{C}\mathrm{P}(\infty))^r$.

Définition. *[10, p275] Soit G un groupe de Lie et M une G-varieté. La fibration de Borel associée est donnée par le fibré*
$$M \to EG \times_G M \xrightarrow{p} BG,$$
ou $EG \times_G M$ est le quotient de $EG \times M$ sous l'action de G definie par $g(x, m) = (xg^{-1}, gm)$. La projection p associée à $[x, m]$ est la classe de x dans BG ; $p([x, m]) = [x]$. L'espace total de la fibration de Borel, $EG \times_G M$, est désigné par M_G et sa cohomologie rationnelle s'appelle cohomologie rationnelle équivariante de M; $H^*_G(M; \mathbb{Q}) := H^*(M_G; \mathbb{Q})$.

Théorème 3.2.1 (10,thm 7.6)**.** *1. Lorsque l'action de G on M est libre,* *alors la projection*

$$q : M_G = EG \times_G M \to M/G,$$

$$[x, m] \mapsto [m],$$

est une équivalence d'homotopie.

2. Lorsque l'action de G sur M est presque libre, alors la projection $q : M_G \to M/G$ est une équivalence d'homotopie rationnelle. C'est à dire, $H^*(q; \mathbb{Q}) : H^*(M/G; \mathbb{Q}) \to H^*(M_G; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme.

3. Lorsque l'action de G sur M est triviale, alors $M_G = BG \times M$.

4. Lorsque H est un sous-groupe compact de G, Alors $(G/H)_G \simeq BH$.

Puisque (2) ci-dessus dit que, du point de vue de la théorie de l'homotopie rationnelle, les actions presque libres équivalent à des actions libres, il est important d'avoir un critère pour les identifier. Le théorème suivante d'actions presque libres atteint ce but.

Théorème 3.2.2. *(théorème de Hsiang, voir* [19]*) Soit G un groupe de Lie compact et soit M une G-variété. G agit presque librement sur M si et seulement si la cohomologie rationnelle de M, $H^*_G(M; \mathbb{Q})$, est de dimension finie.*

Notons que, si l'action est libre, alors nous avons $M_G \simeq M/G$, donc $H^*(M_G; \mathbb{Q}) \cong H^*(M/G; \mathbb{Q})$ est de dimension finie car M/G est une variété compacte.

3.3 Le rang torique

Dans cette section, nous donnons des conditions pour l'existence d'actions de tore presque libres sur une variété M, la première condition concerne la caractéristique d'Euler-Poincaré é $\chi(M)$.

Théorème 3.3.1. *Si la variété M admet une G-action presque libre avec G groupe de Lie connexe et compact, Alors la caracteristique d'Euler-Poincaré de M est nulle.*

Tout groupe de Lie compact G admet une action libre par son tore maximal via des translations et nous savons que $\chi(G) = 0$ puisque G est rationnellement un produit de sphères impaires. D'autre part, par le théorème 3.3.1, une sphère de dimension paire n'admet pas d'action de cercle presque libre.

Démonstration. Supposons que G agit presque librement sur M. Depuis $\Omega BG \simeq G$, la fibre homotopie de l'injection $M \hookrightarrow EG \times_G M$ a le type homotopy de G Nous obtenons de cette manière une fibration homotopique

$$G \to M \to EG \times_G M = M_G.$$

La suite spectrale Serre associée satisfait

$$E_2 \cong H^*(M_G; \mathbb{Q}) \otimes H^*(G; \mathbb{Q}) \to H^*(M; \mathbb{Q}).$$

Par le théorème 3.2.2, le terme E_2 est de dimension finie, et puisque la caractéristique d'Euler est préservée dans une suite spectrale et que $\chi(G) = 0$, alors $\chi(M) = \chi(M_G)\chi(G) = 0$. □

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction de ce chapitre, le principal «invariant» pour l'étude des actions presque libres est le rang torique d'une variété, définissons maintenant cette notion dans le contexte des espaces topologiques.

Définition. *Le rang torique d'un espace X, $rk(X)$, est le plus grand entier r tel que un tore T^r agit presque librement sur X.*

Le rang torique peut être limité pour des raisons uniquement topologiques. Par exemple, un bouquet (wedge) de sphères a un rang torique nul parce que le point de base doit rester fixe sous l'action ce qui découle directement de la topologie du bouquet. Le point de base du bouquet est le seul point dont l'élimination augmente le nombre de composants, donc tout homéomorphisme doit fixer ce point.
Malheureusement, le rang torique n'est pas un invariant homotopique.

Remarque. Nous pouvons également définir l'entier $\mathrm{sk}_s(M)$ qui est le maximum des nombres r tel qu'il existe un tore T^r qui agit de manière lisse sur M. Cet invariant vérifie $rk_s(M) \leq rk(M)$, mais il est très difficile à calculer et la relation exacte avec $rk(M)$ ne semble pas être connu. La condition «presque libre» n'est pas une condition standard dans les groupes de transformation, mais le travail de R. Schultz [10] a exhibé une sphère N de dimension 17 qui n'admet pas d'action de S^1 lisse et libre, mais par contre N admet une action de cercle libre continue puisque N et S^7 sont homéomorphes. Pour des remarques générales concernant la différence entre les degrés de symétrie lisses et continus, voir [19].

Puisque nous sommes intéressés par l'obtention d'un invariant homotopique nous sommes amenés à la variante suivante de la définition du rang torique.

Définition. *Le rang torique rationnel d'un espace X, $rk_0(X)$, est le maximum des $rk(Y)$ pour tout les CW-complexes finis Y de même type d'homotopie rationnelle que X.*

3.3.1 Rang torique des espaces rationnellement elliptiques

Les premiers calculs sur le rang rationnel rationnel sont dus à Allday et Halperin [1]. Rappelons que si M est un espace rationnellement elliptique, la caractéristique de l'homotopie Euler est définie par

$\chi_\pi(M) = rang\pi_{paire}(M) - rang\pi_{impaire}(M)$.

La première estimation du rang torique dérivée des modèles algébriques a également été l'une des premières vérifications (avec la formalité pour les variétés H et la solution du problème géodésique fermé) que la théorie de l'homotopie rationnelle pourrait être utilisée pour obtenir des informations géométriques intéressantes.

Théorème 3.3.2. *Si M est un espace nilpotent rationnellement elliptique,* *alors*

$$rk_0(M) \leq \chi_\pi(M).$$

Démonstration. Considérons la fibration de l'homotopie $T^r \to M \to M_{T^r}$ associée à une action presque libre de T^r sur M. Puisque M et T^r sont des espaces rationnellement elliptiques, il en va de même pour M_{T^r}. Il en est de même aussi par homotopie de la suite exacte longue d'homotopie d'une fibration et, pour la cohomologie, par le théorème 3.2.2. La séquence d'homotopie exacte et longue donne alors

$$\chi_\pi(M) = \chi_\pi(M_{T^r}) + \chi_\pi(T^r).$$

Rappelons maintenant que, pour un espace rationnellement elliptique X, nous avons $\chi_\pi(X) \leq 0$ [10], de $\chi_\pi(M_{T^r}) \leq 0$ et $\chi_\pi(T^r) = -r$, on en déduit $r \leq -\chi_\pi(M)$. $\square$

Corollaire. *Si G est un groupe de Lie connexe compact, alors $rk_0(G) = rang(G)$.*

Démonstration. Rappelons [10, exp2.39] que le modèle minimal d'un groupe de Lie G est une algèbre extérieure $(\wedge(y_1, \ldots, y_r), d = 0)$ avec $r = rang(G)$. Il s'ensuit que $-\chi_\pi(G) = rang(G)$. Par conséquent, $rk_0(G) \leq rang(G)$, d'autre part, si T^r est un tore maximal en G, alors la multiplication de gauche par T^r donne une action libre de T^r sur G, de sorte que $rk_0(G) \geq rang(G)$. $\square$

Corollaire. *Si $M = G/K$ est le quotient d'un groupe de Lie compact connexe G par un sous-groupe compact K, alors*
$rk_0(G/K) = rang(G) - rang(K)$.

Démonstration. De la fibration $K \to G \to G/K$ (et sa longue suite exacte d'homotopie), on en déduit $\chi_\pi(G/K) = \chi_\pi(G) - \chi_\pi(K) =$ -rang G+ rang K. Cela implique l'inégalité
$rk_0(G/K) \leq -\chi_\pi(G/K) = rang(G) - rang(K)$.

Notons maintenant par T^s un tore maximal dans G et par T^r un tore maximal dans K. Les tores maximaux d'un groupe de Lie compact sont tous conjugués, donc on peut supposer $T^r \subset T^s$. La multiplication de gauche par $T^{s-r} = T^s/T^r$ sur G/K est encore une action libre. Par conséquent, le rang rationnel rationnel de G/K est supérieur ou égal à la différence $s-r$, $rk_0(G/K) \geq rang(G) - rang(K)$. $\square$

Exemple. Comme nous l'avons vu, une sphère dimensionnelle impaire S^{2n-1} admet une action libre du cercle, comme $\chi_\pi(S^{2n-1}) = -1$, nous avons $rk_0(S^{2n-1}) = 1$.

3.3.2 Calcul de $rk_0(M)$ avec les modèles minimaux

Soit $G = T^r$ un r-tore et M une G-variété compacte et nilpotente, et

$$M \to EG \times_G M \xrightarrow{p} BG$$

La fibration de Borel associée, notre objectif dans cette section est de décrire le modèle minimal relatif de la fibration de Borel.

Rappelons d'abord les cohomologies rationnelles de T^r et BT^r :
La cohomologie de T^r est une algèbre extérieure de r générateurs de degré 1,

$$H^*(T^r; \mathbb{Q}) = \wedge(y_1, \ldots, y_r)$$

Et la cohomologie de l'espace classifiant BT^r est une algèbre polynomiale de r générateurs de degré 2,

$$H^*(BT^r; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_r].$$

En particulier, le modèle minimal de T^r est $(\wedge(y_1, \ldots, y_r), 0)$, et le modèle minimal de BT^r est $(\wedge(x_1, \ldots, x_r), 0)$.

Soit $(\wedge V, d)$ le modèle minimal de M, alors un modèle minimal relatif de la fibration de Borel s'écrit :

$$(\wedge((x_1, \ldots, x_r), 0) \to (\wedge(x_1, \ldots, x_r) \otimes \wedge V, D) \to (\wedge V, d).$$

Lorsque l'action est presque libre, $H^*(\wedge(x_1,\ldots,x_r)\otimes\wedge V, D)$ est de dimension finie par le théorème 3.2.2 . Cela donne une caractérisation des actions presque libres en termes de modèles minimaux.

Proposition 3.3.1. *Si M est une variété compacte nilpotente de dimension m, alors $rk_0(M)\geq r$ si et seulement s'il existe un modèle minimal relatif de la forme :*

$$(\wedge(x_1,\ldots,x_r),0)\to(\wedge(x_1,\ldots,x_r)\otimes\wedge V, D)\to(\wedge V, d),$$

Où $|x_j|=2$ pour $i=1,\ldots,r$, $(\wedge V,d)$ est le modèle minimal de M et la cohomologie $H^*(\wedge(x_1,\ldots,x_r)\otimes\wedge V, D)$ est de dimension finie.

De plus, si $rk_0(M)\geq r$, alors T^r agit librement sur un CW-complexe fini X qui a le même type d'homotopie rationnel que M, et si $m-r\not\equiv 0 mod 4$, alors on peut choisir X comme variété compacte.

Démonstration. Si nous avons une action libre T^r sur M, d'après ce qui précède l'énoncé de la proposition, nous avons un modèle minimal relatif avec les propriétés requises.

Pour l'autre sens de l'équivalence, on suppose que nous avons un modèle minimal relatif et que N est un CW-complexe nilpotent fini dont le modèle minimal est $(\wedge(x_1,\ldots,x_r)\otimes\wedge V, D)$, Les classes $[x_i]$ définissent des classes dans $H^2(N;\mathbb{Q})$ multipliés par des nombres entiers k_i on obtient $[k_ix_i]$ dans $H^2(N;\mathbb{Z})$ et on utilise ces classes pour définir une application $\varphi: N\to K(\mathbb{Z}/2)^r=(\mathbb{C}\mathrm{P}(\infty))^r$, le pullback du T^r-fibré $(\mathbb{C}\mathrm{P}(\infty))^r$ donne un CW-complexe nilpotent fini X ayant le type d'homotopie rationnelle de M qui admet une action libre de T^r.

La cohomologie de $(\wedge(x_1,\ldots,x_r)\otimes\wedge V, D)$ satisfait la dualité Poincaré et la classe fondamentale est en degré $m-r$. Par conséquent, par le théorème 3.2, lorsque $m-r\not\equiv 0 mod 4$, nous pouvons choisir N pour être une variété compacte. dans ce cas, l'application classifiante de peut être compressée dans $\mathbb{C}\mathrm{P}(m-r)$ et peut être remplacée par une application lisse. la fibration de Hopf sur $\mathbb{C}\mathrm{P}(m-r)$ est alors un fibré principal du cercle dont l'espace total est une variété homogène du type d'homotopie rationnelle de M. $\square$

Exemple. Posons $S^{11} \to N \to S^{12}$ le fibré de sphères associé au fibré tangent de la sphère S^{12}. Nous désignons alors par

$$S^{11} \to E \to (S^3)^4$$

Le pullback de cette fibration le long d'une application $(S^3)^4 \to S^{12}$ de degré 1. Montrons que $rk_0(E) = 1$. Tout d'abord, le modèle minimal de E est

$$(\wedge(y_1, y_2, y_3, y_4, z), d), |y_j| = 3, |z| = 11, Dz = y_1y_2y_3y_4.$$

Nous considérons alors le modèle minimum relatif (avec $|x| = 2$),

$$(\wedge x, 0) \to (\wedge x \otimes \wedge(y_1, y_2, y_3, y_4, z)D) \to (\wedge(y_1, y_2, y_3, y_4, z), d)$$

Où $D(z) = dz+x^6$. De toute évidence, la cohomologie $H^*(\wedge x\otimes\wedge(y_1, y_2, y_3, y_4, z), D)$ est de dimension finie, Ce qui implique par la proposition 3.3.1 qu'il existe une variété dans le même type d'homotopie rationnelle que E qui admet une action libre de S^1. En particulier, $rk_0(E) \geq 1$.

Supposons maintenant que $rk_0(E) = r \geq 1$, par la proposition 3.3.1, il existe un modèle minimal relatif

$$(\wedge(x_1, \dots, x_r), 0) \to (\wedge(x_1, \dots, x_r, y_1, y_2, y_3, y_4, z), D)$$

$$\to (\wedge(y_1, y_2, y_3, y_4, z), d)$$

Avec $\dim H^*(\wedge(x_1, \dots, x_r, y_1, y_2, y_3, y_4, z), D) < \infty$, supposons $D(y_1) = a \neq 0$, $a \in \wedge(x_1, \dots, x_r)$. Maintenant, $D(z) = dz + \tau = y_1y_2y_3y_4 + \tau$ avec $\tau \in Ideal(x_i)$, donc

$$0 = D^2(z) = ay_2y_3y_4 + \xi,$$

Où ξ appartient à l'idéal engendré par y_1 et $\wedge^{\geq 3}(x_1, \dots x_r)$ pour des raisons de degré, ce qui est impossible car $ay_2y_3y_4$ n'est pas dans cet idéal. Par conséquent, par des arguments similaires, $D(y_1) = D(y_2) = D(y_3) = D(y_4) =$

0.

Écrivons maintenant $D(z) = \alpha + \beta$ avec $\alpha \in \wedge(x_1, \ldots, x_r)$ et $\beta \in \wedge(x_j) \otimes \wedge^+(y_j)$. La projection $(\wedge(x_1, \ldots, x_r, y_1, y_2, y_3, y_4, z), D) \to (\wedge(x_1, \ldots, x_r)/(\alpha), 0)$ est alors surjectif en cohomologie. Par conséquent, $\wedge(x_1, \ldots, x_r)/(\alpha)$ est une dimension finie et cela ne peut se produire que lorsque $r \leq 1$.

Notons que par le théorème 3.3.1, nous avons une limite supérieure de $rk_0(E)$ donnée par $5 = -\chi_\pi(E)$ alors, nous voyons que l'estimation d'Allday-Halperin est trop large.

3.3.3 La conjecture du rang torique

Le principal problème lié au rang torique est sans doute la conjecture du rang torique (CRT), qui est attribuée à S. Halperin.

Conjecture. *(conjecture TRC)*
Soit M un CW-complexe fini et nilpotent, alors

$$\dim H^*(M; \mathbb{Q}) \geq 2^{rk_0(M)}.$$

L'idée intuitive derrière la CRT est qu'une action T^r libre presque nulle induit une injection de T^r, au moins cohomologiquement sur M avec bien sûr, $\dim H^*(T^r; \mathbb{Q}) = 2^r$, donc la conjecture est une expression de cette notion intuitive.

Notons que des exemples existent montrant que $H^*(M; \mathbb{Q})$ ne contient pas nécessairement une algèbre extérieure sur r générateurs même si une action presque libre de T^r existe sur M.

Nous avons la formulation suivante de la conjecture TRC en termes de modèles minimaux.

Conjecture. *(CRT algébrique)*
Soit $(\wedge V, d)$ une cdga minimale, et soit $(\wedge(x_1, \ldots, x_R), 0) \to (\wedge(x_1, \ldots, x_r) \otimes \wedge V, D) \to (\wedge V, d)$ un modèle minimal relatif avec $|x_j| = 2$, tel que l'algèbre de cohomologie $H^*(\wedge(x_1, \ldots, x_r) \otimes \wedge V, D)$ soit de dimension finie, Alors $\dim H^*(\wedge V, d) \geq 2^r$.

La conjecture du rang torique est toujours ouverte, mais a elle a été prouvée dans certains cas intéressants que nous allons maintenant considérer.

Proposition 3.3.2. *La CRT est vrai pour tout produit de sphères de dimensions impaires.*

Démonstration. Supposons qu'un r-tore T^r agit presque librement sur un produit de sphères de dimensions impaires $M = S^{n_1} \times S^{n_2} \times \ldots \times S^{n_p}$. Par le théorème [10, 7.13],

$$R \leq -\chi_\pi(M) = p.$$

Cela implique que

$$2^r \leq 2^p = \dim H^*(M; \mathbb{Q}).$$

□

Proposition 3.3.3. *La CRT est vrai pour les espaces homogènes.*

Démonstration. Soit G un groupe de Lie connexe compact et soit K un sous-groupe de G compact. on note le rang torique rationnel de G/K par r, et on considère la suite spectrale de Serre associée à la fibration $K \to G \to G/K$:

$$H^*(G/K) \otimes H^*(K) \to H^*(G).$$

Il s'ensuit que

$$\dim H^*(G) \leq \dim H^*(G/K) \dim H^*(K),$$

Puisque $r =$ rang G –rang K, ce qui donne

$$2^r = 2^{rang(G)-rang(K)} = \frac{2^{rang(G)}}{2^{rang(K)}} = \frac{\dim H^*(G)}{\dim H^*(K)} \leq \dim H^*(G/K).$$

□

Rappelons qu'une algèbre commutative graduée H satisfait la propriété forte de Lefschetz si H se comporte comme la cohomologie d'une variété compacte. Cela signifie que la propriété suivante est satisfaite :

• Il y a un élément $\omega \in H^2$ tel que pour chaque $p < m$, la multiplication par ω^{m-p} induit un isomorphisme $H^p \to H^{2m-p}$.

Théorème 3.3.3. *Si un r-tore T^r agit presque librement sur une variété connexe et compacte M dont cohomologie satisfaisant la propriété forte de Lefschetz, alors l'injection d'une orbite $T^r \hookrightarrow M$, induit une injection en homologie. En particulier, la CRT est vrai dans ce cas.*

Démonstration. S'il y avait une T^r-action presque libre sur M, alors il existerait une injection

$$H_*(T^r; Q) \to H_*(M; \mathbb{Q}).$$

Puisque M est simplement connexe ce qui est impossible. □

Corollaire. *Une variété compacte simplement connexe M dont la cohomologie satisfait la propriété de Lefschetz n'admet pas d'action de tore presque libre.*

Démonstration. S'il y avait une action presque libre du T^r sur M, il y'aurait une injection $H_*(T^r; \mathbb{Q}) \to H_*(M; \mathbb{Q})$, puisque M est simplement connexe, ce qui est impossible. □

Théorème 3.3.4. *(Inégalité de Puppe) Si un tore T^r agit presque librement sur un espace topologique paracompacte de type fini X, alors*

$$\dim H^*(X; \mathbb{Q}) \geq 2r.$$

Voir [25] pour la démonstration.

CHAPITRE 4

AMÉLIORATION DE L'INÉGALITÉ DE PUPPE

4.1 Nouvelle démonstration de l'inégalité de Puppe

Soit X un espace topologique simplement connexe muni d'une action presque libre du groupe T^n. Nous désignons $rk_0(X) = n$ et nous supposons que $n \neq 0$.

Le modèle minimal de Sullivan de l'espace classifiant B_{T^n}du groupe de Lie T^n est un anneau polynomial désigné ici par R, il a la forme suivante :

$$R = (\Lambda(t_1, \cdots, t_n), 0) \text{ avec } deg(t_i) = 2.$$

La fibration de Borel associée [5, p.53] à cette action est :

$$X \longrightarrow X_{T^n} \longrightarrow B_{T^n}$$

Selon Brown [6], il existe un complexe de R-modules différentiels $(R \otimes H^*(X; \mathbb{Q}), \Delta)$ et un quasi-isomorphisme de R -modules :

$$\varrho : (R \otimes (H^*(X;\mathbb{Q}), \Delta) \to A_{PL}(X_{T^n})$$

Soit $\beta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \cdots, \alpha_{2p}\}$ une base de $H^*(X, \mathbb{Q})$ telle que :
$|\alpha_i|$ est impaire pour : $1 \leq i \leq p$
$|\alpha_i|$ est paire pour : $p+1 \leq i \leq 2p$
La différentielle Δ s' écrit pour i, $1 \leq i \leq p$

$$\Delta(1 \otimes \alpha_i) = P_i \otimes 1 + \sum_{j=1}^{p} t_{ij}\alpha_{j+p}$$

où P_i est un polynôme homogène en $(t_1, \cdots, t_n)$.

Considérons la matrice $M = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ d'ordre p sur R,
Et on note, I l'idéal de R définie par :

$$I = \{\sum_{j=1}^{p} a_i P_i \diagup M \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = 0\} \tag{4.1}$$

on note $\overline{R} = R/I$.

Ainsi nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} (R,0) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & (R \otimes H^*(X,\mathbb{Q}), \Delta) \\ (\overline{R},0) \arrow[ur, "\overline{i}"] & \end{tikzcd}$$

Où i est l'injection canonique, p est la surjection canonique,et le morphisme $\overline{i}$ induit par passage au quotient.

En passant à la cohomologie, le diagramme ci-dessus induit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} (R,0) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d] & H(R \otimes H^*(X,\mathbb{Q}), \Delta) \\ (\overline{R},0) \arrow[ur, "\overline{i^*}"] & \end{tikzcd}$$

On a $\overline{i^*}$ est injective.
En effet si $\overline{a} \in \overline{R}$ telle que $\overline{i^*}(\overline{a}) = 0 = i^*(a)$ Alors,

$$a \otimes 1 = \Delta(\sum_{i=1}^{p} a_i \alpha_i) \tag{4.2}$$
$$= \sum_{i=1}^{p} a_i P_i \otimes 1 + \sum_{i=1}^{p} a_i (\sum_{j=1}^{p} t_{ij} \alpha_{j+p}) \tag{4.3}$$
$$= \sum_{i=1}^{p} a_i P_i \otimes 1 + \sum_{j=1}^{p} ((\sum_{i=1}^{p} a_i t_{ij}) \alpha_{j+p}) \tag{4.4}$$

Alors, $a = \sum_{i=1}^{p} a_i P_i$ et $\sum_{i=1}^{p} a_i t_{ij} = 0$ pour tout $i, 1 \leq i \leq p$.
Par conséquent, $a \in I$ d'où $\overline{a} = 0$.
Ce qui implique que, $\dim \overline{R} \leq \dim H^*(X_{T^n}; \mathbb{Q}) < \infty$.
Et comme $\{\overline{t_1}, \cdots, \overline{t_n}\}$ est une famille libre dans $\overline{R}$ alors $\dim \overline{R} \geq n$.
D'autre part, puisque Mest une matrice carrée d'ordre p sur l'anneau R alors I est un R-module de dimension $N \leq p$.
Nous avons $\dim R/I < \infty$ d'où $\dim I = N \geq n$ ceci implique que

$$\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq 2n. \ \square$$

4.2 Une amélioration de la limite inférieure de l'inégalité de Puppe

Le théorème principal

Soit X un espace topologique simplement connexe avec une T^n-action presque libre telle que $\dim H^*(X; \mathbb{C}) < \infty$.
La fibration de Borel associée $[5, p.53]$ à cette action est :

$$X \longrightarrow X_{T^n} \longrightarrow B_{T^n}$$

Le quotient homotopique X_{T^n} admet le modèle minimal de Hirsch-Brown :

$$D_{T^n} = (H^*(B_{T^n};\mathbb{C}) \otimes H^*(X;\mathbb{C}); \tilde{d})$$

Comme $H^*(B_{T^n};\mathbb{C})$-module [2, *section*1.3].

Nous définissons une filtration croissante F_q sur $H^*(X;\mathbb{C})$ par :

$$F_{-1} = 0 \tag{4.5}$$

$$F_q = (\tilde{d}(x)|_{H^*(X;\mathbb{C})})^{-1}(H^*(B_{T^n};\mathbb{C}) \otimes F_{q-1}) \tag{4.6}$$

La longueur $l(X)$ de $H^*(X,\mathbb{C})$ est définie par :

$$l = \inf\{q \in \mathbb{N}/F_q = H^*(X,\mathbb{Q})\}. \tag{4.7}$$

On utilise l'évaluation en $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ pour définir le nouveau espace :

$$D_{T^n}(X)^\alpha = \mathbb{C} \otimes_{H^*(B_{T^n};\mathbb{C})} D_{T^n}(X) \tag{4.8}$$

Où la structure de ce $H^*(X;\mathbb{C})$-module est définie par l'application :

$$\begin{array}{ccc} H^*(B_{T^n};\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ t_i & \mapsto & \alpha_i \end{array}$$

Nous savons par [3, thm 4.1], que pour $\alpha \neq (0, \cdots, 0)$, on a :

$$H^*(D_{T^n}(X)^\alpha, \tilde{d}_\alpha) = 0.$$

$\tilde{d}_\alpha$ est donnée par $\tilde{d}$ évaluée en $\alpha \in \mathbb{C}$. ([2, *p*.26])

Maintenant, pour chaque $q, 0 \leq q \leq l$, soit A_q un complémentaire de F_{q-1} dans F_q :

$$F_q = A_q \oplus F_{q-1}$$

Le résultat principal de cet article est une amélioration de la limite inférieure de l'inégalité de Puppe exprimée dans le théorème suivant :

Théorème 4.2.1. *Soit X un espace topologique simplement connexe avec une action de T^n presque libre, on note $n = rk_0(X)$ pour $n \geq 4$ nous avons toujours* $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq 3n - 2$

La preuve de ce théorème est basée sur le lemme suivant :

Lemme. *Sous les mêmes conditions que le théorème ci-dessus :*
$\dim A_1 \geq n$.

Définition. *(*$[28, vol1, p.90]$*) Par* $\mathbb{P}^n$*, nous désignons un espace projectif de dimension* n *sur* $\mathbb{C}$*. Une variété algébrique projective* V *est un sous-ensemble algébrique de* $\mathbb{P}^n$*, c'est-à-dire l'ensemble des zéros de certains polynômes homogènes* $f_i, i \in I$*,en les coordonnées homogènes* $(x_0, \cdots, x_n)$ *de* $\mathbb{P}^n$ *:* $V = \{(x_0, \cdots, x_n) | f_i(x_0, \cdots, x_n) = 0, i \in I\}$.

Preuve du lemme

Démonstration. Selon Puppe $[24, p.7]$, nous savons que $l \geq n$ et $\dim A_q \geq 2$, pour chaque q, $1 \leq q \leq l - 1$.
Soit $\{a_1, \cdots, a_r\}$ et $\{b_1, \cdots, b_s\}$ deux bases de A_1 et A_0. Pour chaque i, $1 \leq i \leq r$, nous pouvons écrire :

$\tilde{d}(a_i) = p_i b_1 + \omega_i$;

Où p_i sont des polynômes homogènes sur $t_1, \cdots, t_n$, et ω_I est une composition linéaire de $b_2, \cdots, b_s$ sur $\mathbb{Q}[t_1, \cdots, t_n]$. Si l'on suppose que $r < n$, Alors la variété algébrique $V(p_1, \cdots, p_r)$ est différente de $\{(0, \cdots, 0)\}$. Par conséquent, nous pouvons prendre $\alpha \in V(p_1, \cdots, p_r) \backslash \{(0, \cdots, 0)\}$ tel que :

$\tilde{d}_\alpha b_1 = 0$ (car $F_0 = A_0 = ker(\tilde{d})$).

$\tilde{d}_\alpha a_i = \omega_i$ pour $1 \leq i \leq r$.

Cela nous montre que le $\tilde{d}_\alpha$- cocyle b_1 n'est pas zéro dans $H^*(D_{T^n}(X)^\alpha, \tilde{d}_\alpha)$ ce qui est absurde. □

Preuve du théorème 4.2.1

Démonstration. Notons $m_q = \dim A_q, 0 \leq q \leq l$.
D'où, nous avons

$$\dim H^*(X; \mathbb{Q}) = \sum_{q=0}^{l} m_q$$

Ainsi :

$$\dim H^*(X; \mathbb{Q}) \geq m_0 + m_1 + m_l + \sum_{q=2}^{l-1} m_q \geq 2 + n + 2(n-1). \geq 3n - 2.$$ □

Exemples et Remarques

Remarque. Le théorème 4.2.1 donne une mesure de l'obstruction pour une variété pour avoir une action presque libre T^n, par exemple une variété compacte simplement connexe M avec la somme de ses nombres Betti $< 3n - 2$ ne peut avoir d'action presque libre de T^n.

Exemple. Le rang torique de la variété $M = (S^{2n+1})^r$ est égal à r et la somme de ses nombres Betti est égale à 2^r $[10, p.284]$,
nous avons $\dim H^*((S^{2n+1})^4; \mathbb{Q}) = 16 < 3 \times 7 - 2 = 19$.
Donc $(S^{2n+1})^4$ ne peut pas avoir une action presque libre de T^7.

Remarque. *En 2012 M. Amann* [4] *a établi le résultat suivant :*

Théorème 4.2.2 (théorème d'Amann). *Si un n-tore T agit presque librement sur un espace X de Hausdorff paracompacte de dimension finie, alors* $\dim H^*(X; \mathbb{Q}) \geq 2(n + [n/3])$

X peut être considéré comme CW-complexe fini ou une variété compacte.

Il est clair qu'à partir de $n = 7$, le théorème 4.2.1 donne une limite inférieure plus grande que le théorème d'Amann.

CHAPITRE 5

CONJECTURE DE HILALI DANS LE CAS DES MODÈLES À GÉNÉRATEURS IMPAIRS

5.1 La conjecture H dans le cas de générateurs impairs sous condition

En 1990 [9], M.R.Hilali a conjecturé que la dimension de l'homotopie rationnelle d'un espace topologique elliptique, simplement connexe ne dépasse pas celle de sa cohomologie rationnelle. Cette conjecture (de Hilali) se nomme aussi conjecture H.

Conjecture H (version topologique) :

Soit X un espace topologique elliptique, simplement connexe. Alors,

$$\dim \pi_* (X) \otimes \mathbb{Q} \leq \dim H^* (X; \mathbb{Q})$$

Conjecture H (version algèbrique) :

Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle minimal de Sullivan d'un espace topologique X elliptique et simplement connexe, alors

$$\dim H^* (\Lambda V, d) \geq \dim V$$

On a le résultat particulier suivant :

Théorème 5.1.1. *Soit X un espace topologique elliptique, simplement connexe, et soit $(\Lambda V, d)$ son modèle minimal de Sullivan. Soit $1 \leq i \leq n$, et posons :*

$$V = \mathbb{Q}\left(a_1, ..., a_n\right) \, avec \, |a_i| \in 2\mathbb{N}{+}1, \; da_i = P_i \in \Lambda\left(a_1, ..., a_{i-1}\right) \; et \; A_i = \Lambda\left(a_1, ..., a_i\right).$$

Si pour tout $1 \leq i \leq n$, $[P_i^2] = 0$ dans $H^*\left(A_{i-1}\right)$, alors $\dim H^*\left(A_n\right) \geq n$.

Pour la démonstration, on va procéder par récurrence sur $n = \dim V$.

$V = \mathbb{Q}\left(a_1, ..., a_n\right)$. Ici, on veut prouver que $\dim H^*\left(\Lambda\left(a_1, ..., a_n\right), d\right) \geq n$, avec les $|a_i|$, $1 \leq i \leq n$, sont impairs et $\left(da_i\right)^2 = dQ_i$ où $Q_i \in \Lambda\left(a_1, ..., a_{i-1}\right)$.

On suppose par récurrence que $\dim H^*\left(\Lambda\left(a_1, ..., a_{n-1}\right), d\right) \geq n-1$, et montrons que $\dim H^*\left(\Lambda\left(a_1, ..., a_n\right), d\right) \geq n$. Pou $n = 0$

Soit $\{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ une base homogène de $H^*(\Lambda\left(a_1, ..., a_{n-1}\right), d)$.
Soit $1 \leq i \leq n$, et posons :

$$da_i = P_i \in \Lambda\left(a_1, ..., a_{i-1}\right), \; \alpha_i = [\omega_i] \; \text{ et } A_i = \Lambda\left(a_1, ..., a_i\right).$$

On pose : $i : A_{n-1} \longrightarrow A_n$ l'injection canonique, et

$$i_* : H^*\left(A_{n-1}\right) \longrightarrow H^*\left(A_n\right).$$

Nous allons faire appel aux deux propositions suivantes :

Proposition 5.1.1. *Si $[P_n] \neq 0$ dans $H^*\left(A_{n-1}\right)$ Alors on a*

$$\ker i_* = H^*\left(A_{n-1}\right).[P_n]$$

l'idéal de $H^*\left(A_{n-1}\right)$ engendré par $[P_n]$.

Démonstration. (a) On a

$$i_*\left([\omega P_n]\right) = [\omega P_n] = [d\left(\omega a_n\right)] = 0$$

et donc
$$H^*(A_{n-1}).[P_n] \subset \ker i_*$$

(b) Soit $\alpha \in \ker i_*$, donc $\exists(\omega, P, Q)$ tel que :

$$\begin{cases} \alpha = [\omega] \\ d\omega = 0 \\ \omega = d(Pa_n + Q) \end{cases}$$

donc
$$\omega = (dP)\,a_n + (-1)^{|P|}\,PP_n + dQ$$

ce qui implique que

$$\begin{cases} dP = 0 \\ \omega = \left((-1)^{|P|}\,PP_n + dQ\right) \end{cases}$$

on en déduit que, $\alpha = [\omega' P_n]$ où

$$[\omega'] = \left[(-1)^{|P|}\,P\right]$$

Et par suite,

$$\alpha \in H^*(A_{n-1}).[P_n]$$

Ainsi,
$$\ker i_* = H^*(A_{n-1}).[P_n]$$

□

Proposition 5.1.2. *On a*

$$\dim H^*(A_n) \geq \dim H^*(A_{n-1})$$

Démonstration. On pose :

$$\mathcal{B}_1 = \{[\omega_i P_n] \,/\, 1 \leq i \leq p \textit{ et } |\omega_1| \leq \ldots \leq |\omega_p|\}$$

base de $\ker i_*$, *et*

$$\mathcal{B}_2 = \{\beta_j = [\rho_j] \diagup 1 \leq j \leq q\}$$

base d'un supplémentaire F de $\ker i_*$ dans $H^*(A_{n-1})$. Montrons que

$$\mathcal{B} = \{[\omega_i P_n a_n - \omega_i Q_n], \beta_j \diagup 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q\}$$

est un système libre dans $H^*(A_n)$. En effet, soient $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{Q}^p$ *et* $(\mu_1, ..., \mu_q) \in \mathbb{Q}^q$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i [\omega_i P_n a_n - \omega_i Q_n] + \sum_{j=1}^{q} \mu_j [\rho_j] = 0$$

Donc, $\exists (P, Q) \in A_{n-1}^2$ tel que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \omega_i P_n a_n - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \omega_i Q_n + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \rho_j = d(Pa_n + Q) = (dP)a_n + (-1)^{|P|} PP_n + dQ$$

ceci nous donne

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \omega_i P_n = dP \\ \sum_{j=1}^{q} \mu_j \rho_j - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \omega_i Q_n = (-1)^{|P|} PP_n + dQ \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i [\omega_i P_n] = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \\ \sum_{j=1}^{q} \mu_j \beta_j \in H^*(A_{n-1}) . [P_n] \cap F \end{cases}$$

Et par suite, $\forall 1 \leq i \leq p,\ \forall 1 \leq j \leq q,\ (\lambda_i, \mu_j) = (0, 0)$. Et par conséquent,

$$\dim H^*(A_n) \geq card(\mathcal{B}) = \dim H^*(A_{n-1})$$

$\square$

Démonstration. Du théorème

Deux cas sont à traiter :

$I)$ $[P_n] = 0$ dans $H^*(A_{n-1})$:

Ecrivons $da_n = P_n$. Si $[P_n] = 0$ *et* $P_n = dQ$, alors on peut faire un changement de variable et poser $a'_n = a_n - Q$. Dans ce cas

$(\Lambda(a_1, ..., a_n), d) \simeq (\Lambda(a_1, ..., a_{n-1}), d) \otimes (\Lambda a'_n, 0)$

et $H^*(\Lambda(a_1, ..., a_n)) = H^*(\Lambda(a_1, ..., a_{n-1})) \otimes \Lambda a'_n$

Donc

$$\dim H^*(\Lambda(a_1, ..., a_n)) \geq 2(n-1).$$

$II)$ $[P_n] \neq 0$ dans $H^*(A_{n-1})$:

Posons :

$$Z(A_{n-1}) := \ker(d : A_{n-1} \longrightarrow A_{n-1}) \;\; et \;\; B(A_{n-1}) := Im(d : A_{n-1} \longrightarrow A_{n-1})$$

Considérons le morphisme

$$\phi : \begin{array}{ccc} H^*(A_{n-1}) & \longrightarrow & H^*(A_{n-1}) \\ [\omega] & \longmapsto & [\omega P_n] = [P_n \omega] \end{array}$$

On a $Im\phi \subset \ker \phi$

En effet, soit $\theta \in Z(A_{n-1})$, on a $\phi([\theta P_n]) = [\theta P_n^2] = [d(\theta Q_n)] = 0.$

Et on a aussi

$$Si \ker \phi = Im\phi, \;\; alors \;\; \dim H^*(A_n) \geq \dim H^*(A_{n-1}) + 1$$

Puisque (a) $\forall 1 \leq k \leq n-1, \;\; da_k = 0$: alors

$$\dim H^*(A_n) \geq \dim H^*(A_{n-1}) \geq 2^{n-1} \geq n$$

(b) S'il existe $l \in \{1, ..., n-1\}$ tel que $da_l \neq 0$: on voit que $da_l \in B(A_{n-1}) \subset \ker \phi$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{Q}^*$ tel que $da_l = \lambda P_n$, puisque $|a_1| \leq$

$... \leq |a_n|$, donc nécessairement $|da_l| \leq |P_n|$. Considérons

$$\beta = [a_l - \lambda a_n] \in H^* (A_n)$$

Montrons que la famille $\mathcal{B} \cup \{\beta\}$ est libre dans $H^* (A_n)$.

En effet, supposons que

$$\beta = \left[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \omega_i P_n a_n - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \omega_i Q_n + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \rho_j \right] \Longleftrightarrow$$

$$a_l - \lambda a_n = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \omega_i P_n a_n - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \omega_i Q_n + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \rho_j + dQ$$

où $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{Q}$ *et* $Q \in A_n$. Or ceci est impossible, car le second membre ne contient pas le terme a_l. D'où, $\dim H^* (A_n) \geq \dim H^* (A_{n-1}) + 1$.

On le résultat suivant :

$$Si \ \ker \phi \neq Im\phi, \ alors \ \dim H^* (A_n) \geq \dim H^* (A_{n-1}) + 1$$

En effet, on sait d'après la proposition 5.1.2 que $\mathcal{B}$ est un système libre dans $H^* (A_n)$. Soit $[\omega] \in \ker \phi \setminus Im\phi$.

On a $\phi ([\omega]) = 0$, donc il existe $\rho \in A_{n-1}$ tel que $\omega P_n = d\rho$. Soit

$$\alpha = [a_n \omega - \rho] \in H^* (A_n)$$

Montrons que la famille $\mathcal{B} \cup \{\alpha\}$ est libre dans $H^* (A_n)$.

En effet, Si

$$\alpha = \left[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \omega_i P_n a_n - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \omega_i Q_n + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \rho_j \right]$$

avec λ_i, μ_j des rationnels, donc $\exists (P, Q) \in A_{n-1}^2$ tel que

$$
\begin{aligned}
a_n\omega-\rho &= a_n\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_iP_n\right)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_iQ_n+\sum_{j=1}^{q}\mu_j\rho_j+d\left(a_nP+Q\right)=a_n\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_iP_n-dP\right)\\
&\quad-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_iQ_n+\sum_{j=1}^{q}\mu_j\rho_j+P_nP+dQ
\end{aligned}
$$

On obtient donc le système

$$
\begin{cases}
\omega=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_iP_n-dP\\
\rho=-\left(\sum_{j=1}^{q}\mu_j\rho_j+P_nP+dQ\right)+\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\omega_iQ_n
\end{cases}
$$

Or la première équation implique que

$$
[\omega]\in Im\phi,\ \left([\omega]=\phi\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\left[\omega_i\right]\right)\right)
$$

contradiction avec $[\omega]\in\ker\phi\setminus Im\phi$. $\square$

5.2 Un exemple

Exemple. Soit $da_i=monôme,\ où\ V=\mathbb{Q}\left(a_i\right)_{1\leq i\leq n}.$

Posons :

$$
da_i=P_i=a_{i_1}...a_{i_n}=a_{i_1}P_i'
$$

Si $da_i=0$, on prend $a_i\in H^*$.

Sinon, on a $da_{i_1}a_i=0$, si c'est un cobord, soit $d\beta a_k=a_{i_1}a_i\quad(\beta\in\mathbb{Q}^*)$.

Deux cas à envisager :

(1) $a_{i_1}a_i\ \in B\left(a_{i+1},...,\widehat{a_k},...,a_n\right)$:

Il existe donc un certain m tel que : $d\beta'a_m=a_{i_1}a_i\quad(\beta'\in\mathbb{Q}^*)$. On prend

$$
\beta'a_m-\beta a_k\in H^*
$$

(2) $a_{i_1}a_i \notin B\left(a_{i+1},...,\widehat{a_k},...,a_n\right)$:

On a $da_{i_1}a_k = 0$, si c'est un cobord, posons : $a_{i_1}a_k = d\alpha a_l \quad (\alpha \in \mathbb{Q}^*)$.

(a) $a_{i_1}a_k \in B\left(a_{k+1},...,\widehat{a_l},...,a_n\right)$:

Il existe s tel que : $d\alpha' a_s = a_{i_1}a_k$.

$$\alpha' a_s - \alpha a_l \in H^* convient$$

(b) $a_{i_1}a_k \notin B\left(a_{k+1},...,\widehat{a_l},...,a_n\right)$:

On a $da_{i_1}a_ia_k = 0$. On montre que $a_{i_1}a_ia_k \in H^*$.

Supposons par l'absurde que $a_{i_1}a_ia_k$ est un cobord, c'est-à-dire $a_{i_1}a_ia_k = dQ$.

Pour des raisons de degrés, on doit avoir $Q \in \Lambda^2$.

On a

$$a_{i_1}a_ia_k = dQ = d\left(\lambda_i a_i Q_i + \lambda_k a_k Q_k\right) \ \textit{où}\ Q_i \in \mathbb{Q}^* a_l \ \textit{et}\ Q_k \in \mathbb{Q}^* a_k$$

Ceci nous donne $dQ = d\left(\lambda_i a_i Q_i\right)$, puisque $a_k Q_k = 0$, ainsi,

$$dQ = \underbrace{\lambda_i Q_i da_i}_{\neq 0} - \underbrace{\lambda_i a_i dQ_i}_{\neq 0}$$

Or ceci est impossible, car $\lambda_i Q_i da_i$ ne contient pas le terme a_i.

Et par conséquent,

$$\dim H^*\left(\Lambda V, d\right) \geq \dim V$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Allday and S. Halperin, Lie group actions on spaces of finite rang, Quart. J. Math. Oxford (2) 29 (1978) 63-76.

[2] C. Allday and V. Puppe, Cohomological methods in transformation groups, volume 32 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[3] C. Allday and V. Puppe, On the localization theorem at the cochain level and free torus actions, Algebraic topology Göttingen 84, Procedings, Springer lect. notes in Math 1172 (1985) 1-16.

[4] M. Amann, Cohomological consequences of almost free torus actions arXiv :1204.6276v1 27 Apr 2012.

[5] A. Borel, Seminar on transformation groups Ann. of math Studies n° 46. Princeton New Jersey.

[6] E. H. Brown, Twisted tensor product I, Ann. of Math vol. 69 (1959) 223-246.

[7] Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas, Rational homotopy theory, volume 205 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New Yo, 2001.

[8] Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas, Rational homotopy theory II, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore 2015.

[9] Y. Félix, S. Halperin, Rational homotopy theory via Sullivan models : A survey, Arxiv, August 18, 2017

[10] Y. Félix, J. Oprea, and D. Tanré, Algebraic models in geometry, volume 17 of Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, Oxford, 2008.

[11] J. Fernandez De Bobadilla, J. Fresan, V. Munoz and A. Murillo, The Hilali conjecture for hyperelliptic spaces, Mathematics Without Boundaries : Surveys in Pure Mathematics, Book Chapter pp : 21-36, 2014.

[12] P. A. Griffiths, J. W. Morgan, Rational Homotopy Theory and Differential Forms, Progress in Mathematics, vol. 16, Birkhäuser, 1981.

[13] S. Halperin, Finiteness in the minimal models of Sullivan, Trans.A.M.S. 230 (1977) 173-199.

[14] S. Halperin, Rational homotopy and torus actions, London Math. Soc. Lecture Note Series 93, Cambridge Univ. Press (1985) 293-306.

[15] M. R. Hilali, Sur la conjecture de Halperin relative au rang torique. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 7 (2000), no. 2, 221–227.

[16] M. R. Hilali, Actions du tore T^n sur les espaces simplement connexes. Thèse à l'Université catholique de Louvain, (1990).

[17] M.R.Hilali and M.I.Mamouni, The conjecture H : A lower bound of cohomologic dimension for an elliptic space, Topology and its applications, vol. 156.

[18] M. R. Hilali and M. I. Mamouni, A conjectured lower bound for the cohomological dimension of elliptic spaces, Journal of Homotopy and Related Structures, vol. 3(1), 2008, pp. 379-384.

[19] W. Y. Hsiang, Cohomology theory of topological transformation groups, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1975.

[20] I. M. James, reduced product spaces, Ann. of math 82 (1955)170-197.

[21] T. Kadeishvili. Cohomology $C_\infty-$algebra and rational homotopy type, ArXiv :0811.1655v1 $[math.AT]$, 2008.

[22] O. Nakamura and T. Yamaguchi. Lower bounds of Betti numbers of elliptic spaces with certain formal dimensions. Kochi J. Math., 6 :9–28, 2011.

[23] L. Lechuga, A. Murillo, Complexity in rational homotopy, Algebra, Geometria et Topologia, Universidad de Malaga, Ap. 59, 29050 Malaga, Spain

[24] V. Puppe, Multiplicative aspects of the Halperin-Carlsson conjecture, Georgian Mathematical Journal, 2009, 16 :2, pp. 369–379, arXiv 0811.3517.

[25] V. Puppe, On the torus rank of topological spaces, Proceding Baker 1987.

[26] M. Schlessinger and J. Stashé. Deformation theory and rational homotopy type, arXiv : 1211.1647v1 $[math.QA]$, 2012.

[27] J.-P. Serre. Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. (2), $58 : 258 - 294$, 1953.

[28] I. R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry, 2 Vols., Springer, 1994.

[29] H. Shiga and T. Yamaguchi. The set of rational homotopy types with given cohomology algebra, Homology Homotopy and Applications, (1), $5 : 423 - 436$, 2003.

[30] H. Shiga and N. Yagita. Graded algebras having a unique rational homotopy type, Proc. of the A.M.S, (4), $85 : 623 - 632$, 1982.

[31] D. Sullivan. Geometric topology. Part I. Massachussets Institute of Technology, Cambridge, Mass.,1971. Localization, periodicity, and Galois symmetry, Revised version.

[32] D. Sullivan. Infinitesimal computations in topology. Ins. Hautes Etudes sci. Publ. Math., $(47) : 269 - 331$ (1978), 1977.

[33] Yu. Ustinovskii, On almost free torus actions and Horroks conjecture, 2012, arXiv 1203.3685v2.