Essai sur les conjectures de Hilali et de Halperin: Amélioration de l'Inégalité de Puppe.

Aaya Hassan

Université Hassan II, Faculté Des Sciences-Ain Chock
Casablanca

24/11/2018

Dirigée par: **Mr.Mohamed Rachid Hilali**

Plan de l'exposé

Introduction

La topologie algébrique, anciennement appelée topologie combinatoire, est une branche des mathématiques appliquant les outils de l'algèbre dans l'étude des espaces topologiques.

Plus exactement, elle cherche à associer de manière naturelle des invariants algébriques aux structures topologiques.

La naturalité signifie que ces invariants vérifient des propriétés de fonctorialité au sens de la théorie des catégories.

Introduction

Quelques résultats

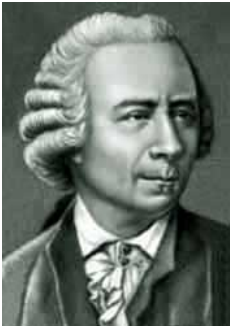
- Sur la Terre, il existe toujours deux lieux antipodaux ayant même température et même altitude,
- Si l'on essaie de recouvrir le globe terrestre par 3 fermés, on ne peut éviter que l'un d'entre eux contienne deux points antipodaux,
- La plupart des jeux admettent une position d'équilibre dans laquelle aucun des joueurs n'a intérêt à changer sa stratégie,
- On ne peut peigner une boule de billard chevelue sans éviter un point de "tourbillon",
- Il n'existe que cinq polyèdres réguliers en dimension 3,
- Si l'on veut recouvrir complètement une chambre à air par des rustines en forme de triangles, il faudra au moins 7 sommets.

Un aperçu historique

Dans l'étude de l'histoire de la topologie algébrique on peut distinguer trois phases capitales :
- Naissance vers 1750
- Pose des piliers 1900
- Grande expansion à partir de 1950

Son origine remonte à Leibniz, il a écrit à Huygens en 1679 :
.. je ne suis pas encore content de l'algèbre, en ce qu'elle ne donne ni les plus courtes voies, ni les plus belles constructions de géométrie, c'est pourquoi. lorsqu'il s'agit de cela, je crois qu'il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique ou linéaire, ... qu'on pourrait représenter des figures et même des machines et mouvements en caractères, comme l'algèbre représente les nombres ou grandeurs

Le problème des sept ponts de Königsberg est connu pour être à l'origine de la topologie algébrique, Résolu par Leonhard Euler en 1736. Il a ennoncé en 1750 avec son fameux théorème sur les polyèdres.



Théorème des polyèdres

si un polyèdre convexe de l'espace a s sommets, a arêtes et f faces, alors $s - a + f = 2$.

Entre 1895 et 1904, Henri Poincaré(1854-1912) a fondé la topologie algébrique alors appelée Analysis Situs en publiant une série de six mémoires et cinq Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.

- Il a introduit en 1893 ce qui s'appelle aujourd'hui la caractéristique d'Euler-Poincaré qui étend la caractéristique d'Euler à des polyèdres tracés sur des surfaces.

- Mais les notions principales introduites sont l'homotopie, le groupe fondamentale, l'homologie, et la cohomologie.
- Les groupes d'homotopie supérieurs furent définis par Hurewicz en 1935 et leurs propriétés furent ensuite développées.
- Les complexes cellulaires, aussi appelés CW-complexes, défini par J. H. C. Whitehead (1932) forment une classe d'espaces topologiques plus grande que celle des complexes simpliciaux mais présentant comme eux des propriétés combinatoires les prêtant bien aux calculs homologiques. Ils sont obtenus à partir de recollements de boules de dimension n ou simplement cellules.
- Le concept de fibré apparut dans les années 1920, pour atteindre son état actuel à la fin de années 1940. Vers 1950, différents concepts nouveaux furent inventés comme celui de K-théorie.

Une grande difficulté rencontrée

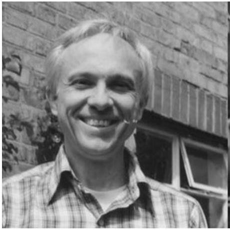
Pourtant, à ce jour, il n'est pas possible d'avoir une description de $\pi_k(S_n)$ pour un k et un n donné.

Définition

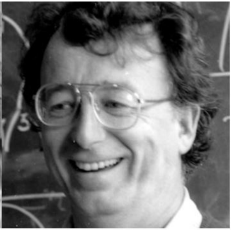
Le k-ième groupe d'homotopie supérieur $\pi_k(X, x_0)$ est l'ensemble des classes d'homotopie relative à $\mathcal{S}^{k-1}$ d'applications continues $f : \mathcal{B}^k \to X$ telle que : $f(\mathcal{S}^{k-1}) = x_0$.

Naissance de l'homotopie rationnelle

Les topologues se sont donc fixé un objectif moins ambitieux : peut'on au moins décrire $\pi_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$?
Et là, la réponse est positive, du moins si X est simplement connexe (c'est-à-dire si $\pi_1(X) = 0$) : dans ce cas, on peut calculer les groupes $\pi_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ à partir du complexe de de Rham, grâce à la théorie de Quillen-Sullivan, qui date des années 1960-1970.



DANIEL QUILLEN



DENIS SULLIVAN

La théorie est devenue très opérationnelle ; outre de nombreux résultats internes, citons pour exemples

- l'existence d'un nombre infini de géodésiques fermées, (géométriquement distinctes), sur une variété compacte, sans bord, simplement connexe, si l'algèbre de cohomologie a au moins deux générateurs (Sullivan-Vigue).
- la dimension d'un tore opérant librement sur un espace homogène G/K est majorée par la différence du rang des deux groupes (Allday-Halperin) ;
- si un espace X a une catégorie de Lusternik-Schnirelmann finie et une dimension totale d'homotopie infinie, les nombres $\sum_{k=0}^{p} \pi_k(X)$ croissent exponentiellement et l'algèbre de Lie n' est pas résoluble (Felix-Halperin-Thomas).

- Elle permet également l'introduction d'invariants secondaires non nuls des feuilletages (Hurder),
- l'étude de l'approximation des feuilletages par des fibrations (Tischler-Lehmann)
- l'étude de la catégorie de Lusternik- Schnirelmann, du groupe de Gottlieb, des variétés kahleriennes,
- Une démonstration d'une conjecture de Bott sur la représentation de la cohomologie des cochaines continues sur les champs de vecteurs comme celle de l'espace des sections d'un fibre (Haefliger),

...

Conjecture du rang torique

Définition

Un produit de n cercles est un groupe de Lie abélien, appelé n-tore (ou simplement un tore) et noté $\mathbb{T}^n$. Les tores sont des exemples des groupes de Lie abéliens.

Dans ce travail nous avons étudié les action du tore sur les espaces topologiques.

Définition

Une action est dite libre si tous ses groupes d'isotropies sont triviaux,et est dite presque libre si tous ses groupes d'isotropies sont finis.

Conjecture du rang torique

Le plus grand nombre entier $n \geq 1$ pour lequel un espace topologique X admet une action d'un n-tore presque libre s'appelle le rang torique de X et noté $rk(X)$. Si X n'admet pas d'action de tore presque libre, alors $rk(X) = 0$. Malheureusement, $rk(X)$ n'est pas un invariant d'homotopique et est assez difficile à calculer. Pour obtenir un invariant homotopique, nous définissons le rang torique rationnel, $rk_0(X)$ qui est le maximum des $rk(Y)$ parmi tous les CW-complexes fini Y de même type d'homotopie rationnelle que X.

Conjecture de Halperin, ou conjecture du rang torique CRT

Soit X un espace topologique simplement connexe avec une action de T^r presque libre, alors $\dim H^*(X; \mathbb{Q}) \geq 2^{rk_0(X)}$.

Conjecture du rang torique

Cas 1

La CRT est vrai pour tout produit de sphères de dimensions impaires.

Cas 2

La CRT est vrai pour les espaces homogène.

Cas 3

Si un r-tore T^r agit presque librement sur une variété connexe et compacte M dont cohomologie satisfaisant la propriété forte de Lefschetz, alors l'injection d'une orbite $T^r \hookrightarrow M$, induit une injection en homologie. En particulier, la CRT est vrai dans ce cas.

Problème 1

Problème 1

Soit X un espace topologique simplement connexe avec une action de T^n presque libre, est ce qu'on peut trouver un polynôme P de degré ≥ 1 tel que $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq P(rk_0(X))$?.

Les meilleures minorations démontrée étant celle de Puppe et d'Amann :

Inégalité de Puppe 1983

Si X est simplement connexe, alors $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq 2rk_0(X)$.

théorème d'Amann 2012

Si un n-tore T agit presque librement sur un espace X de Hausdorff paracompacte de dimension finie , alors
$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq 2(n+[n/3])$

Conjecture de Hilali

- En 1990, M.R.Hilali qui travaillait sur la CRT a comparé la dimension cohomoloqique à celle de l'homotopie et a énoncé la conjecture suivante :

Conjecture H : (Version topologique)

Si X est un espace topologique elliptique simplement connexe, alors

$$\dim \pi_* (X) \otimes \mathbb{Q} \leq \dim H^* (X; \mathbb{Q})$$

Conjecture de Hilali

La conjecture H a été résolue pour les cas suivants :

- En 1990, M.R. Hilali fut le premier qui l'a résolu dans le cas pur.
- En 2008, M.R. Hilali et M.I. Mamouni ont résolu la conjecture dans des cas spéciaux, on cite par exemple les $H-$espaces, les espaces formels, les variétés symplectiques-cosymplectiques...
- En 2011, O. Nakamura et T. Yamaguchi l'ont démontré pour les espaces elliptiques où leurs dimensions formelles ≤ 16.
- En 2012, Murillo avec d'autres auteurs, ont résolu la conjecture dans le cas des espaces hyperelliptiques.

Conjecture de Hilali

- En 2015, Amann a résolu la conjecture de Hilali pour les espaces dits $2-$stages et pour une classe d'espaces que l'on place dans le contexte de fibrations.
- En 2015, B. Benlkrafi, M.R. Hilali et M.I. Mamouni ont résolu la conjecture dans le cas coformel sous condition sur la nilpotence de l'algèbre de Lie.
- En 2015, M.R. Hilali, M.I. Mamouni et H. Yamoul ont prouvé la conjecture dans le cas des espaces de configurations d'une variété fermée simplement connexe sous certaines conditions.

Conjecture de Hilali

- En 2018, Y. Rami a démontré la conjecture de Hilali pour les espaces à générateurs impairs dans son article, *Gaps on the Milnore-Moore spectrale sequence and the Hilali conjecture*.
- En 2018, T. Yamaguchi a formulé une version relative de cette conjecture, et l'a démontré pour certains cas particuliers.

Problème 2

Problème 2

Est ce qu'on peut exhiber une nouvelle classe d'espaces non étudiée auparavant, qui vérifie la conjecture de Hilali ?

Ces problèmes sont considérés comme étant NP-Hard, c'est à dire très complexes ; généralement d'un cas à un autre les démonstrations lorsqu'elles existent sont très longues et compliquées et bien souvent très différentes.

(L. Lechuga, A. Murillo, Complexity in rational homotopy, 1998)

Algèbres graduées différentielles commutatives

Espaces vectoriels gradués

- $V = \{V^i\}_{i \geq 0}$ est une famille de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels indexés par des entiers.
- $v \in V^i$ est dit de degré i, on note $|v| = i$.
- V est dit de type fini si $dim V^i < \infty$ pour tout i.

Algèbres différentielles graduées commutatives

Algèbres différentielles graduées commutatives ADGC

Une algèbre différentielle graduée commutative est la donnée d'une algèbre $A = \bigoplus_{n \geq 0} A^n$ avec la multiplication :

- $$\begin{array}{ccc} A^n \times A^m & \longrightarrow & A^{n+m} \\ (a, b) & \longmapsto & a.b \end{array}$$
- Vérifiant $a.b = (-1)^{|a||b|}\, b.a$ (Commutativité).

et la différentielle :

- $d \colon A^n \longrightarrow A^{n+1}$ où
- d est linéaire
- $d^2 = 0$
- $d\,(ab) = da.b + (-1)^{|a|} a.db$ (Formule de Leibniz)

Algèbres graduées différentielles commutatives

Exemple

$\Lambda V \cong Sym(V^{pair}) \otimes Ext(V^{impair})$ s'appelle algèbre graduée commutative libre engendrée par l'espace vectoriel V.

Notation

$\Lambda^k V = \{de\ longueur\ k\}$ et $(\Lambda V)^k$={de degré k}

Remarque

$d \ : \ V \longrightarrow \Lambda V$ s'étend à une différentielle sur ΛV si l'extension $d \ : \ \Lambda V \longrightarrow \Lambda V$ satisfait $d^2 = 0$.

Modèles de Sullivan

Algèbres de Sullivan

- Une algèbre de Sullivan c'est la donnée d'une adgc de la forme $(\Lambda V, d)$ telle que :
- V admet une base $\{v_\alpha / \alpha \in J\}$ où J est un ensemble bien ordonné tel que :
- $dv_\alpha \in \Lambda(v_{\beta<\alpha})$
- $(\Lambda V, d)$ est minimale si $\alpha < \beta \Longrightarrow |v_\alpha| \leq |v_\beta|$.

Remarques

- $V^0 = 0 = V^1$ alors $(\Lambda V, d)$ est minimale ssi $dV \subset \Lambda^{\geq 2} V$.
- $(\Lambda V, d)$ est minimale ssi $d_0 = 0$.

Modèles de Sullivan

Exemples

- $(\Lambda a, 0)$ avec $|a| = 2n+1$ est une algèbre de Sullivan.
- $(\Lambda(a,b), d)$ où $|a| = 2n$ et $|b| = 4n-1$,
  avec $da = 0$ et $db = a^2$ est une algèbre de Sullivan.

Définition

Soient (A, d) une adgc et $(\Lambda V, d)$ une algèbre de Sullivan.
$m \ : \ (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} (A, d)$ est un modèle de Sullivan de (A, d).

Modèles de Sullivan

Exemples

- $(\Lambda V, d) = (\Lambda a, 0)$ avec $|a| = 2n+1$
  est un modèle de sullivan de l'adgc $(H^*(\mathbb{S}^{2n+1}; \mathbb{Q}), 0)$.
- $(\Lambda(a,b), d)$ où $|a| = 2n$ et $|b| = 4n-1$,
  avec $da = 0$ et $db = a^2$
  est un modèle de Sullivan de l'adgc $(H^*(\mathbb{S}^{2n}; \mathbb{Q}), 0)$.

L'homotopie rationnelle

- La théorie de l'homotopie rationnelle étudie le type d'homotopie rationnelle des espaces topologiques. Connaître celui-ci permet une compréhension partielle du type d'homotopie.
- Un des avantages principaux de cette théorie est que l'on peut associer, à un espace, un objet algébrique (une adgc) qui encode complètement le type d'homotopie rationnelle de cet espace.
- Un espace topologique X simplement connexe est dit rationnel si ses groupes d'homotopie $\pi_*(X)$ sont des $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels.

L'homotopie rationnelle

- Une rationalisation de X est une application continue

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

où Y est simplement connexe et rationnel, induisant

$$\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_n(Y) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_n(Y)$$

pour tout $n \geq 1$.

Théorème (D. Sullivan)

Pour tout espace topologique simplement connexe X, dont la cohomologie singulière $H^*(X;\mathbb{Q})$ est de type fini, (i.e. $dimH^*(X;\mathbb{Q}) < \infty$), on peut associer un modèle minimal de Sullivan $(\Lambda V, d)$ unique à isomorphisme prés tel que :
$V \cong Hom(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ en tant qu'espaces vectoriels.
$H^*(\Lambda V, d) \cong H^*(X;\mathbb{Q})$ en tant qu'algèbres graduées

Théorème

Tout espace simplement connexe admet une rationalisation.

L'homotopie rationnelle

L'association $X \longrightarrow A_{PL}(X)$, suivie du choix d'un modele minimal, fournit une équivalence entre la catégorie homotopique des espaces topologiques simplement connexes, rationnels,de $\mathbb{Q}-$type fini, et celle des algèbres différentielles graduées commutatives a algèbre de cohomologie finie en chaque dimension et sans élément de degré 0 ou 1, autre que les constantes.

L'homotopie rationnelle

Théorème

Si X est simplement connexe, alors il existe un CW-complexe relatif $(X_{\mathbb{Q}}, X)$, ne contenant ni 0-cellules ni 1-cellules, tel que l'inclusion $\varphi : X \longrightarrow X_{\mathbb{Q}}$ est une rationalisation. Par ailleurs, si Y est simplement connexe et rationnel, alors toute application continue $f : X \longrightarrow Y$ s'étend à $X_{\mathbb{Q}}$. Autrement dit, il existe une application continue $\widetilde{f} : X_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Y$ unique à homotopie près, telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Y \\ & X_{\mathbb{Q}} \arrow[u, "\widetilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

L'homotopie rationnelle

- Le type d'homotopie rationnelle d'un espace X simplement connexe est le type d'homotopie de son rationalisé $X_{\mathbb{Q}}$.
- $X(\textit{simplement connexe}) \simeq_{\mathbb{Q}} Y(\textit{simplement connexe})$:signifie que X et Y ont le même type d'homotopie rationnelle.
- Tous les rationalisés de X ont le même type d'homotopie.

Espaces elliptiques

- Une algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$ est elliptique si
$$dimH^*(\Lambda V, d) \ et \ dimV \ sont \ finies$$
- Un espace topologique X simplement connexe est elliptique si
$$dimH^*(X; \mathbb{Q}) \ et \ dim\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \ sont \ finies$$
- Soient X un espace topologique simplement connexe et $(\Lambda V, d)$ son modèle minimal de Sullivan.
$$X \ est \ elliptique \iff (\Lambda V, d) \ est \ elliptique$$

Espaces elliptiques

Définitions

Soient X un espace topologique $1-$connexe et elliptique, et $(\Lambda V, d)$ son modèle minimal de Sullivan.

- La dimension formelle $fd(X) = fd(\Lambda V, d)$:

$$fd(X) = max\{k \in \mathbb{N}/H^k(X;\mathbb{Q}) \neq 0\}$$

- La caractéristique d'Euler-Poincaré cohomologique $\chi_c(X) = \chi_c(\Lambda V, d)$:

$$\chi_c(X) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i dimH^i(X;\mathbb{Q})$$

Espaces elliptiques

Définitions

- La caractéristique d'Euler-Poincaré homotopique $\chi_\pi(X) = \chi_\pi(\Lambda V, d)$:

$$\begin{aligned}\chi_\pi(X) &= rang\ \pi_{pair}(X) - rang\ \pi_{impair}(X)\\ &= dim V^{pair} - dim V^{impair}\end{aligned}$$

Théorème(Halperin)

Si $(\Lambda V, d)$ est simplement connexe, elliptique alors :

(1) $\chi_\pi(\Lambda V, d) \leq 0$ *et* $\chi_c(\Lambda V, d) \geq 0$

(2) $\chi_\pi = 0 \iff \chi_c > 0 \iff H^{impair}(\Lambda V, d) = 0$

La version algébrique des conjectures étudiées

Conjecture de Hilali algébrique

Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle minimal de Sullivan d'un espace topologique X elliptique et simplement connexe, alors

$$\dim H^*(\Lambda V, d) \geq \dim V$$

Action de groupe de Lie

Définition

Un groupe de Lie est un ensemble G qui est à la fois une variété différentielle et un groupe pour lequel la multiplication, $(g, g') \mapsto gg'$, et l'application inverse, $g \mapsto g^{-1}$, sont lisses. La dimension d'un groupe de Lie est sa dimension en tant que variété différentielle. Un homomorphisme de groupes de Lie est un homomorphisme de groupes qui est aussi une application lisse. Un isomorphisme de groupes de Lie est un homomorphisme f qui admet un inverse f^{-1} tel que f^{-1} soit aussi un homomorphisme de groupes de Lie.

Action de groupe de Lie

Exemples

• $\mathbb{R}$ et S^1 sont des groupes de Lie pour les structures habituelles des variétés et des groupes.
• Le produit de deux groupes de Lie est un groupe de Lie pour les deux structures canoniques du produit de groupes et produit de variétés.
• Les seules sphères qui sont des groupes de Lie sont S^0, S^1 et S^3.
• $\mathbb{R}^n$ et $(S^1)^n$ sont des groupes de Lie. Les tores $T^n = (S^1)^n$ sont un exemple classique de groupes de Lie, on peut y ajouter les différents groupes de matrices.

Action de groupe de Lie

Définition

• Une action à gauche d'un groupe topologique G sur un espace topologique X est une application continue

$$\begin{array}{rccc} \rho : & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g, x) & \mapsto & g.x \end{array}$$

telle que : $\forall g, h \in G, x \in X \qquad g.(hx) = (gh).x \quad$ et $\quad e.x = x$;
• Un G-espace à gauche (X, ρ) est constitué d'un espace X et d'une action à gauche ρ de G sur X ;
• L'ensemble $G_x = \{g \in G / gx = x\}$ est un sous groupe de G appelé groupe d'isotropie (ou stabilisateur) en x ;
• Une action est dite libre (presque libre) si tous les groupes d'isotropies sont triviaux(sont finis).

Définition

Soient $p\colon E \longrightarrow B$ une application continue surjective et un ouvert $U \subset B$.
Une trivialisation de p au dessus de U est un homéomorphisme $\varphi\colon p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ c'est à dire un homéomorphisme qui vérifie $pr_1 \circ \varphi = p$
comme φ induit un homéomorphisme de $p^{-1}\{u\}$ dans $\{u\} \times F$ alors F est déterminé à partir de cet homéomorphisme .
L'application p est localement triviale s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de B tel que p admet une trivialisation au-dessus de chaque $U \in \mathcal{U}$
Une application localement triviale est dite un fibré ,et une trivialisation locale est appelée une carte locale.
Si les fibres sont homéomorphes à F ;alors F est dit fibre type.
L'espace B est dit l'espace base ,et E l'espace total du fibré p.

Définition

Soit G un groupe topologique qui agit à droite sur un espace topologique E.
Un G-fibré principal est un fibré $p\colon E \longrightarrow B$ avec G préserve et agit librement et transitivement sur les fibres.

G-fibré principal

Définition

Un fibré (E, p, B) est dit un G-fibré principal si :

1. E est un G-espace à droite.
2. L'action de G est libre .
3. $$\begin{array}{ccc} E & & E \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \cong & E/G \end{array}$$

Comme l'action est libre $F \cong G$

Fibré associé à un G-fibré principal

Soit (E, p, B) un G-fibré principal et F un G-espace à gauche.
On définit la relation $\sim_G$ sur $E \times F$
par :$(e, f) \sim_G (e', f') \Leftrightarrow \exists g \in G \quad e' = e.g \text{ et } f' = g^{-1}.f$
On a $\sim_G$ est une relation d'équivalence et on considère l'espace quotient $E_F = (E \times F)/ \sim_G$

La correspondance $\begin{array}{cccc} p_F : & E_F & \longrightarrow & B \\ & [e, f] & \longmapsto & p(e) \end{array}$ est bien définie.

On a $p_F : E_F \longrightarrow B$ est un fibré de fibre F

Définition

Le fibré $p_F : E_F \longrightarrow B$ de fibre F est dit le fibré associé au G-fibré principal (E, p, B)

G-fibré principal universel

Définition

Un G-fibré principal $p\colon EG \longrightarrow BG$ est dit universel si :

1. Pour tout G-fibré principal $\pi\colon P \longrightarrow X$ sur X un CW-complexe alors il existe une application continue $h : X \longrightarrow BG$ telle que $P \cong h^*(EG)$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "\cong"] \arrow[dr, "\pi"'] & h^*(EG) \arrow[r] \arrow[d] & EG \arrow[d, "p"] \\ & X \arrow[r, dashed, "h"] & BG \end{tikzcd}$$

2. Si h_0 et h_1 : $X \longrightarrow BG$ sont deux applications continues telle que $h_0(EG) \simeq h_1(EG)$ alors h_0 et h_1 sont homotopes.
3. BG est l'espace classifiant et EG est l'espace total du fibré universel $p\colon EG \longrightarrow BG = EG/G$

Soit X un G-espace
Borel a remplacé X par le G-espace $EG \times X$ qui a le même type d'homotopie que X sur lequel G agit librement
par :$g.(e, x) = (e.g^{-1}, g.x)$
Soit $EG \longrightarrow BG$ le G-fibré universel .
L'espace orbite $X_G = EG \times_G X = (EG \times X)/G$ est l'espace total du fibré associé $X \longrightarrow X_G \longrightarrow BG$ de fibre X.

Diagramme de Borel

Comme les projections π_1 et π_2 sont équivariantes alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
EG \arrow[d] & EG \times X \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
BG & X_G \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & X/G
\end{tikzcd}$$

Théorème

Hsiang

Soit G un groupe de Lie compact qui agit d'une façon continue sur X . Alors G agit presque librement si et seulement si $H^*_G(X, \mathbb{Q})$ est de dimension fini

Si G agit presque librement , on a une équivalence d'homotopie faible $X/G \simeq X_G$ et

$$H^*(X_G, k) \cong H(H^*(X, \Bbbk) \tilde{\otimes} H^*(\mathbf{B}G, \Bbbk)) \cong H^*(X/G, k)$$

.

Cas de l'action du Tore

La cohomologie de T^r est une algèbre extérieure de r générateurs de degré 1,

$$H^*(T^r;\mathbb{Q}) = \wedge(y_1,\ldots,y_r)$$

Et la cohomologie de l'espace classifiant BT^r est une algèbre polynomiale de r générateurs de degré 2,

$$H^*(BT^r;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1,\cdots,x_r].$$

En particulier, le modèle minimal de T^r est $(\wedge(y_1,\ldots,y_r),0)$, et le modèle minimal de BT^r est $(\wedge(x_1,\ldots,x_r),0)$.

Cas de l'action du Tore

Soit $G = T^r$ un r-tore et M une G-variété compacte et nilpotente, et

$$M \to EG \times_G M \xrightarrow{p} BG$$

La fibration de Borel associée ;
Soit $(\wedge V, d)$ le modèle minimal de M, alors un modèle minimal relatif de la fibration de Borel s'écrit :

$$(\wedge((x_1, \dots, x_r), 0) \to (\wedge(x_1, \dots, x_r) \otimes \wedge V, D) \to (\wedge V, d).$$

Lorsque l'action est presque libre, $H^*(\wedge(x_1, \dots, x_r) \otimes \wedge V, D)$ est de dimension finie. Cela donne une caractérisation des actions presque libres en termes de modèles minimaux.

Cohomologie équivariante

Généralités

En mathématiques, la cohomologie équivariante est une théorie de la cohomologie en topologie algébrique qui s'applique aux espaces topologiques ayant une action de groupe. On peut y voir une généralisation commune de la cohomologie de groupe et de théorie de la cohomologie ordinaire

Définition

La cohomologie équivariante de l'espace X à coefficients sur le corps $\mathbb{k}$ est l'anneau définie comme suit :

$$H_G^*(X, \mathbb{k}) := H^*(EG \times_G X, \mathbb{k})$$

Proposition

La définition de la cohomologie équivariante est indépendante du choix du fibré universel .

La conjecture de Halperin algébrique

Conjecture de Halperin algébrique

Si $(\Lambda V, d)$ est une adgc minimale telle que $(\Lambda(x_1, \cdots, x_r), 0) \to (\Lambda(x_1, \cdots, x_r) \otimes \Lambda V, D) \to (\Lambda V, d)$ soit un modèle minimal relatif avec $|x_i| = 2$, et $(\Lambda(x_1, \cdots, x_r) \otimes \Lambda V, D)$ de dimension finie, Alors :

$$\dim H^* (\Lambda V, d) \geq 2^r$$

Premier résultat

Théorème

Soit X un espace topologique simplement connexe avec une action de T^n presque libre, on note $n = rk_0(X)$ pour $n \geq 4$ nous avons toujours $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq 3n-2$

La démonstration est basée sur la construction suivante : Nous définissons une filtration croissante F_q sur $H^*(X;\mathbb{C})$ par :

$$F_{-1} = 0 \tag{1}$$

$$F_q = (\tilde{d}(x)|_{H^*(X;\mathbb{C})})^{-1}(H^*(B_{T^n};\mathbb{C}) \otimes F_{q-1}) \tag{2}$$

pour chaque $q, 0 \leq q \leq l$, soit A_q un complémentaire de F_{q-1} dans F_q :
$F_q = A_q \oplus F_{q-1}$

Lemme

Sous les mêmes conditions que le théorème ci-dessus :
$\dim A_1 \geq n$.

Deuxième résultat

Théorème

Soit X un espace topologique elliptique, simplement connexe, et soit $(\Lambda V, d)$ son modèle minimal de Sullivan. avec
$V = \mathbb{Q}(a_1, ..., a_n)$ tel que $|a_i| \in 2\mathbb{N}+1, da_i = P_i \in \Lambda(a_1, ..., a_{i-1})$
on pose $\quad A_i = \Lambda(a_1, ..., a_i)$;
Si pour tout $1 \leq i \leq n$, $\left[P_i^2\right] = 0$ dans $H^*(A_{i-1})$, alors
$\dim H^*(\Lambda V, d) \geq dim V$

Perspectives

- Trouver un polynôme de degré au moins égale à 2 qui répond au premier problème posé.
- Démontrer les conjectures de Hilali et de Halperin dans le cas général.
- Ou bien exhiber des contre-exemples pour ces conjectures.
- Résoudre le problème ouvert de Micheline Vigué :
  Soit $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ une fibration telle que F et B sont elliptiques et vérifient tous les deux la conjecture de Hilali. Quelles conditions que doit satisfaire la fibration pour que E vérifie aussi la conjecture de Hilali.
- Prospecter de nouvelles pistes dans la recherche de résolution comme : - Les opérades, - Les suites spectrales, - Les C_∞-Algèbres.

Bibliographie

• C. Allday and S. Halperin, Lie group actions on spaces of finite rang, Quart. J. Math. Oxford (2) 29 (1978) 63-76.
• C. Allday and V. Puppe, Cohomological methods in transformation groups, volume 32 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
• C. Allday and V. Puppe, On the localization theorem at the cochain level and free torus actions, Algebraic topology Göttingen 84, Procedings, Springer lect. notes in Math 1172 (1985) 1-16.
• M. Amann, Cohomological consequences of almost free torus actions arXiv :1204.6276v1 27 Apr 2012.
• A. Borel, Seminar on transformation groups Ann. of math Studies n° 46. Princeton New Jersey.

• E. H. Brown, Twisted tensor product I, Ann. of Math vol. 69 (1959) 223-246.
• Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas, Rational homotopy theory, volume 205 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New Yo, 2001.
• Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas, Rational homotopy theory II, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore 2015.
• Y. Félix, S. Halperin, Rational homotopy theory via Sullivan models : A survey, Arxiv, August 18, 2017
• Y. Félix, J. Oprea, and D. Tanré, Algebraic models in geometry, volume 17 of Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, Oxford, 2008.
• J. Fernandez De Bobadilla, J. Fresan, V. Munoz and A. Murillo, The Hilali conjecture for hyperelliptic spaces, Mathematics Without Boundaries : Surveys in Pure Mathematics, Book Chapter pp : 21-36, 2014.

• S. Halperin, Finiteness in the minimal models of Sullivan, Trans.A.M.S. 230 (1977) 173-199.
• S. Halperin, Rational homotopy and torus actions, London Math. Soc. Lecture Note Series 93, Cambridge Univ. Press (1985) 293-306.
• M. R. Hilali, Sur la conjecture de Halperin relative au rang torique. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 7 (2000), no. 2, 221–227.
• M. R. Hilali, Actions du tore T^n sur les espaces simplement connexes. Thèse à l'Université catholique de Louvain, (1990).
• M.R.Hilali and M.I.Mamouni, The conjecture H : A lower bound of cohomologic dimension for an elliptic space, Topology and its applications, vol. 156.

• M. R. Hilali and M. I. Mamouni, A conjectured lower bound for the cohomological dimension of elliptic spaces, Journal of Homotopy and Related Structures, vol. 3(1), 2008, pp. 379-384.
• W. Y. Hsiang, Cohomology theory of topological transformation groups, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1975.
• I. M. James, reduced product spaces, Ann. of math 82 (1955)170-197.
• O. Nakamura and T. Yamaguchi. Lower bounds of Betti numbers of elliptic spaces with certain formal dimensions. Kochi J. Math., 6 :9–28, 2011.
• L. Lechuga, A. Murillo, Complexity in rational homotopy, Algebra, Geometria et Topologia, Universidad de Malaga, Ap. 59, 29050 Malaga, Spain

• V. Puppe, Multiplicative aspects of the Halperin-Carlsson conjecture, Georgian Mathematical Journal, 2009, 16 :2, pp. 369–379, arXiv 0811.3517.

• V. Puppe, On the torus rank of topological spaces, Proceding Baker 1987.

• M. Schlessinger and J. Stashé. Deformation theory and rational homotopy type, arXiv : 1211.1647v1 $[math.QA]$, 2012.

• J.-P. Serre. Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. (2), $58 : 258 - 294$, 1953.

• H. Shiga and T. Yamaguchi. The set of rational homotopy types with given cohomology algebra, Homology Homotopy and Applications, (1), $5 : 423 - 436$, 2003.
• H. Shiga and N. Yagita. Graded algebras having a unique rational homotopy type, Proc. of the A.M.S, (4), $85 : 623 - 632$, 1982.
• D. Sullivan. Geometric topology. Part I. Massachussets Institute of Technology, Cambridge, Mass.,1971. Localization, periodicity, and Galois symmetry, Revised version.
• D. Sullivan. Infinitesimal computations in topology. Ins. Hautes Etudes sci. Publ. Math., $(47) : 269 - 331$ (1978), 1977.
• Yu. Ustinovskii, On almost free torus actions and Horroks conjecture, 2012, arXiv 1203.3685v2.

Merci pour votre attention