Approximation des algorithmes de planification de mouvement

Younes Derfoufi Eneignant au CRMEF OUJDA

Université My Ismail Meknès

01 Mars 2014

Introduction

Les travaux de Michael Farber et ses compagnons sont axés sur les théorèmes d'existence des algorithmes de planification de mouvement et au calcul de l'invarint homotopique TC (topological complexity) sans donner une méthode de détermination pratique de ces algorithmes ni même une méthode permettant leurs approximations ! Nous allons donner ici une méthode permetant leurs approximation suivant une topologie d'espace uniforme et d'espace localement convexe que nous allos définir.

Algorithme de planification de mouvement

Dans tout ce paragraphe X designe un espace topologique connexe par arc, et $PX = \{\gamma : [0,1] \longrightarrow X\}$ l'espace des chemins continues sur X. On définit l'application $\pi : PX \longrightarrow X \times X$ par $\gamma \longrightarrow (\gamma(0), \gamma(1))$. (PX est équipé de la topologie compacte ouverte)

Definition

Un algorithme de planification de mouvement est une application continue $s : X \times X \longrightarrow PX$ verifiant : $\pi \circ s = Id_{X \times X}$

Theorem

Un algorithme de planification de mouvement $s : X \times X \longrightarrow PX$ *existe si et seulement si* X *est contractil*

Notation

L'ensemble des algorithmes de planification de mouvement sur X sera noté MAP_X

Cas d'un espace vecoriel normé (voir séminaire 01 Février 2014)

Cas d'un espace métrique, Euclidean Neighborhood Retract (ENR)

- Dans tout ce paragraphe (X, d) designe un espace métrique complet et connexe par arc, et par suite la topologie compacte ouverte définie sur PX coîncide avec celle de la convergence uniforme définie par la distance :

$$\delta(\gamma, \gamma') = \sup_{t \in [0,1]} d(\gamma(t), \gamma'(t)||.$$

Cas d'un espace métrique, Euclidean Neighborhood Retract (ENR)

- Dans tout ce paragraphe (X, d) designe un espace métrique complet et connexe par arc, et par suite la topologie compacte ouverte définie sur PX coïncide avec celle de la convergence uniforme définie par la distance :

$$\delta(\gamma, \gamma') = \sup_{t \in [0,1]} d(\gamma(t), \gamma'(t)||.$$

- On définit ensuite sur l'ensemble des algorithmes de planification de mouvement MPA_X, la famille des semis distances :

$$\begin{aligned} d_K(s_1, s_2) &= \sup_{(A,B) \in K} \delta(s_1(A, B), s_2(A, B)) \\ &= \sup_{(A,B) \in K} \sup_{0 \leq t \leq 1} d(s_1(A, B)(t), s_2(A, B)(t)). \end{aligned}$$

Cas d'un espace métrique, Euclidean Neighborhood Retract (ENR)

On définit ensuite les semi-boules ouvertes $B_{d_K}(s, \varepsilon) = \{s' \in MPA_X \, / \, d_K(s, s') < \varepsilon\}$, on munit ensuite MPA_X de la topologie définie par la famille des semie distances $(d_K)_K$ dont les ouverts sont des réunions quelconque d'intersections finies de semies boules ouvertes.

Remark

L'espace MPA_X est séparé et régulier

Cas d'un espace métrique, Euclidean Neighborhood Retract (ENR)

Theorem

L'espace MPA_X est un espace uniforme séquentiellement complet

Proof.

Il est clair que MPA_X est un espace uniforme, il suffit de considérer la famille des entourages $U_{d_K,\varepsilon} = \{(x, y) \in X \times X / \; d_K(x, y) < \varepsilon\}$ (où K est un compact de X et $\varepsilon > 0$) et on verifie facilement que la topologie définie par la famille des entourages $U_{d_K,\varepsilon}$ coïncide avec celle définie par la famille des semi-distance $(d_K)_K$. Montrons maintenant qu'il est séquentiellement complet, soit alors $(s_n)_n$ une suite de cauchy formée d'algorithmes de planification de mouvement, pour tout compact K de X $\times X$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tq : □

Cas d'un espace métrique, Euclidean Neighborhood Retract (ENR)

Proof.

$$\begin{array}{rcl} n,m & \geq & N \Longrightarrow d_K(s_n,s_m) < \varepsilon \\ ie\ \ n,m & \geq & N \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} d(s_n(A,B)(t), s_m(A,B)(t)) \\ \forall (A,B) \in K, \forall t \in [0,1] \end{array} \right. \qquad (*) \end{array}$$

On déduit que pour tout $(A,B) \in K$,et tout $t \in [0,1]$, la suite $(s_n(A,B)(t))_n$ et de cauchy dans X qui est complet soit donc $s(A,B)(t)$ sa limite. En faisant tendre m vers l'infini dans $(*)$ on déduit que s_n converge vers s pour la structure uniforme de MPA_X (ce qu'on a fait pour une semi boule on peut le faire de la même manière pour une intersection finie de semi-boules) □

Cas d'un espace métrique, Euclidean Neighborhood Retract (ENR)

Proposition

Si X est dénombrable à l'infini alors MPA_X est métrisable

Corollary

Si X est une variété topoloique alors MPA_X est métrisable

Cas d'un espace métrique, Euclidean Neighborhood Retract (ENR)

Theorem

(Arens Fells) Tout espace métrique (X, d) est isométrique à un fermé d'un espace vectoriel normé.

Ce résultat connu sous le nom du Th d'Arens Fells nous autorise à plonger l'études des algorithmes de planification de mouvement sur une partie fermée d'un espace vectoriel normé, ce qui nous donne droit à tous les outils et résultats d'evn.

Cas d'un espace métrique, Euclidean Neighborhood Retract (ENR)

Definition

Soit X un espace topologique et A une partie non vide de X.
1) On dit que A est un voisinage euclidien retract (**Euclidean Neighborhood Retract**) dans X, s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une injection continue $i : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $i(X)$ soit un voisinage retract d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$
2) On dit qu'un espace métrique Y est un voisinage euclidien retract absolu (**Absolute Euclidean Neighborhood Retract**) si pour tout espace métrique Z incluant Y comme une partie fermée alors Y est un voisinage retract de Z

Cas d'un espace métrique, Euclidean Neighborhood Retract (ENR)

Les résultats suivants nous autorise à plonger l'études des approximation des algorithmes de planification de mouvement sur une partie d'un espace de Hilbert.

Theorem

Si (X, d) *est un espace métrique séparable alors il existe une injection continue* $i : X \longrightarrow I^\infty$ *(où* $I^\infty = [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{3}] \times \ldots$*) qui est une partie compacte de l'espace de Hilbert*
$H = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)/\Sigma|v_i|^2 < \infty\}$

Proposition

Un espace métrique compact est un ANR si et seulement s'il existe une injection continue $i : A \longrightarrow I^\infty$ *telle que* $i(A)$ *soit un voisinage retracte d'un ouvert* U *de* I^∞

Approximation des algorithmes de planification de mouvement: cas d'un evn et d'un espace de Hilbert

Definition

Un algorithme de planification de mouvement sur X est dit affine par morceau, si pour tous $A, B \in X$ il existe une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$ telle que sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ $s(A, B)$ est de la forme : $s(A, B)(t) = a_i t + b_i$ où a_i et b_i sont deux élément de X qui dépendent uniquement du couple (A, B)

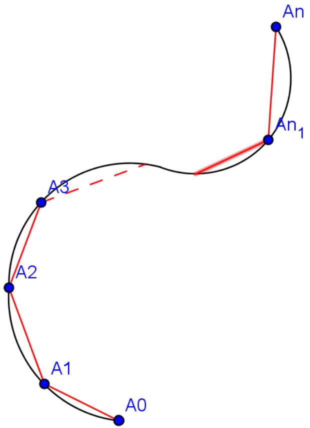
Notation

L'ensemble des algorithme de planification de mouvement affine par morceau sur l'espace X sera noté MPA_X^{Aff}

Approximation des algorithmes de planification de mouvement: cas d'un evn et d'un espace de Hilbert

Nous allons maintenant prouver que dans une partie compacte de X on peut approximer tout algorithme de planification de mouvement par un algorithme de planification de mouvement affine par morceau, ce qui est très util en pratique lorsqu'on connait qu'un tel algorithme existe et on ne peut pas le déterminer explicitement, on peut à ce moment là faire recourt à une discretisation et utiliser les différentes méthodes fornies par l'analyse numérique et l'analyse fonctionnelle appliquée.

Approximation des algorithmes de planification de mouvement: cas d'un evn et d'un espace de Hilbert



Approximation des algorithmes de planification de mouvement: cas d'un evn et d'un espace de Hilbert

On munit $MPA(K, PX)$ de la topologie d'espace localement convexe définie par la famille des semi-normes $(P_{K\cap K'})_{K'}$ où K' parcourt l'ensemble des parties compactes de $X \times X$

Lemma

Si K est une partie compacte de $X \times X$ alors $MPA^{Aff}(K, PX)$ est dense dans $MPA(K, PX)$

Proof.

Soit $s : K \longrightarrow PX$ un algorithme de planification de mouvement et soit $\varepsilon > 0$ et K' un compact de $X \times X$, nous allons prouver qu'il existe $s' \in APM_K^{Aff}(K \cap K', PX)$ tel que $s' \in B_{P_{K\cap K'}}(s, \varepsilon)$ ie $\sup\limits_{(A,B)\in K\cap K'}(||s(A,B) - s'(A,B)||_\infty < \varepsilon$. L'application $(K \cap K') \times [0,1] \longrightarrow X$
$(A, B, t) \longmapsto s(A, B)(t)$ est continue sur le compact $(K \cap K') \times [0,1]$ donc uniformément continue et par suite il existe $\eta > 0$ tel que :

$$||(A, B, t) - (A', B', t')||_\infty < \eta \Longrightarrow (||s(A, B)(t) - s(A', B')(t')|| < \varepsilon$$

□

Approximation des algorithmes de planification de mouvement: cas d'un evn et d'un espace de Hilbert

Proof.

choisissons maintenant n un entier assez grand de manière à avoir $\frac{1}{n} < \eta$ et considérons la subdivision $\left(t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{n}, ..., t_{n-1} = \frac{n-1}{n}, t_n = 1\right)$ on définit ensuite l'algorithme de planification de mouvement affine par morceaux s_n par :
pour chaque $i \leq n-1$ et pour chaque $t \in [t_i, t_{i+1}[$
$s_n(A, B)(t) = [n(t_i - t) + 1]s(A, B)(t_i) + n(t - t_i)s(A, B)(t_{i+1})$ on obtient alors :

$\square$

Approximation des algorithmes de planification de mouvement: cas d'un evn et d'un espace de Hilbert

Proof.

$||s(A, B)(t) - s_n(A, B)(t)|| =$
$||[n(t_i - t) + 1][s(A, B)(t) - s(A, B)(t_i)] + n(t - t_i)[s(A, B)(t) -$
$s(A, B)(t_{i+1})]||$
$\leq (n(t_i - t) + 1)||s(A, B)(t) - s(A, B)(t_i)|| + n(t - t_i)||s(A, B)(t) -$
$s(A, B)(t_{i+1})||$
$< (n(t_i - t) + 1)\varepsilon + n(t - t_i)\varepsilon = \varepsilon$ cqfd $\square$

Approximation des algorithmes de planification de mouvement: cas d'un evn et d'un espace de Hilbert

Remark

Ce qu'on a prouvé pour la semie boule $B_{P_{K\cap K'}}(s,\varepsilon)$ *on le prouve de la même manière pour une intersection finie de semie boule.*

Remark

A la place des fonction affines par morceaux, on peut penser au fonction polynomiales par morceaux (**B Splines , courbes de Bezier...** *).* [11]

Corollary

L'espace uniforme $MPA^{Aff}(X \times X, PX)$ *est dense dans* $MPA(X \times X, PX)$

Cas d'un espace de Hilbert

Les mêmes résultats néanmoins dans ce cas particuliers d'utres résultats surgissent : on pourra utiliser les propriétés des projections, les moindres carrée discrêts...
Afin d'eclaircir les choses nous allons nous plongé sur une partie compacte et connexe K de X , nous considérons ensuite l'espace $C_0(K \times K, PX)$ formé des fonctions continues de $K \times K \longrightarrow PX$ et on définit ensuite la norme $||f|| = \sup\limits_{(A,B)\in K\times K} (\sup\limits_{0\leq t\leq 1} |||f(A,B)(t)|||)$.

Problèmes soulevés

Problem

La norme définie ci dessus derive elle d'un produit scalaire ? Peut on définir un produit scalaire sur $C_0(X \times X, PX)$?

Remark

Pour une partie bornée K *de* X*,on peut définir un produit scalaire sur* $C_0(K \times K, PX)$ *en posant* $g_{s_1,s_2}(A, B, t) = s_1(A, B)(t).s_2(A, B)(t)$ *et* $< s_1 / s_2 >= \int_{K \times K \times [0,1]} g_{s_1,s_2}$

problème3

Peut on étendre les résultats d'approximation des algorithmes de planification de mouvement aux courbes de Bezier et B-spline...?

Bibliographie

[1]. Michael Farber, Topological Complexity of Motion Planning, Discrete Comput Geom 29:211–221 (2003), Springer Verlag New York Inc

[2]. I. M. JAMES, On category, in the sense of Lusternik-Schnirelman, , Topology. Vol. 17. pp. 331-343 Press Ltd.. 1978.

[3]. Michael Farber, Invitation to topological robotics, Zurich Lecturs in Advenced Mathematics, European Mathematical Society.

[4]. MICHAEL FARBER AND MARK GRANT, Topological complexity of configuration spaces, arXiv:0806.4111V1 25 Jun 2008

[5]. Gregory Lupton and Jérôme Scherer, Topological Complexity of H - Space, Mathematics Subject Classi cation 2010

[6]. IBAI BASABE, JES´ US GONZ´ ALEZ, YULI B. RUDYAK, AND DAI TAMAKI, Higher topological complexity of configuration spaces on sphere. arXiv:1009.1851v4[math.AT] 8 Apr 2011

[7] Amin Saif and Adem Kılıçman. On classifying Hurewicz fibration and free Bundles over Polyhedron bases. Institute of Mathematical Rsearch (INSPEM), arXive:1008.3959v1 [math.AT] 24 Aug 2010

[8] Yuli B. Rudyac. On Higher Analogs of Topological Complexity.

Bibliographie

[9] Mark Grant, Gregory Lupton and John Opera, Space of Topoloical complexity One. arXiv:1207.4725v1 [math.AT] 19 Jul 2012

[10] Laurent Schwartz, Topologie générale et analyse fonctionnelle .Enseignement Des Sciences. Hermann

[11] Larry L.Schumaker, Spline Function : Basic Theory. Cambridge, University Press

[12] Haîm Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications. Masson Paris

[13] N.Bourbaki, éléments de mathématiques, Topologie générale chapitre de 1 à 4. Hermann

[14] N.Bourbaki, éléments de mathématiques, Topologie générale chapitre de 5 à 10. Hermann

[15] N.Bourbaki, éléments de mathématiques, Espace vectoriels topologiques chapitre de 1 à 5. Masson

[16] Walter Rudin, Functional Anlysis. Lybrary of congress

[17] James Dugundji, Topology. Universal Book Stall, 1989