Une minoration de la cohomologie d'un espace coformel

BEN EL KRAFI BADR

Faculté des sciences AIN CHOK CASA

MEKNES 01/03/2014

Definitions

(p.65 [Ta]) Une ldg (L, ∂),1-réduite,à homologie de type fini, est coformelle si l'une des coditions équivalentes suivantes est satisfaite:
i/ Son algèbre de Lie d'homologie $(H_*(L, \partial), 0)$ à même type d'homotopie que (L, ∂).
ii/ (L, ∂) à un modèle de Sullivan à différentielle purement quadratique.

Definitions

Un espace X est coformel si $(L_X = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}, 0)$ est un LDG- modèle de X.
$C^*(\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}, 0)$ est un modèle de Sullivan de X à différentielle quadratique.

$\mathbb{k}$ désigne un corps de caractéristique 0

1/ $C^*(L,0) = (\Lambda V, \partial)$

2/ $V = \sharp sL$

3/ $C_*(L,0) = (\Lambda sL, \partial)$

4/ $C^* = \sharp \circ C_*$

5/

$$\partial(sx_1 \Lambda sx_2 \Lambda ... \Lambda sx_k) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{|sx_1| + |sx_2| + ... |sx_i|} s\left[x_i, x_j\right] \Lambda sx_1 \Lambda ... \Lambda \widehat{sx_i}$$

$\Lambda ... \Lambda\ \widehat{sx_j} \Lambda ... \Lambda sx_k$

$$\partial(sx) = 0$$

Théorème

Theorem

$$dim(Ext_{UL}(\mathbb{k},\mathbb{k})) \geq dim(L/\,[L;L])$$

Proof.

$$\begin{aligned} dim\ (Ext_{UL}(\mathbb{k},\mathbb{k})) &= dim\ H(C^*(L)) \qquad (p.315\ [FHT]) \\ &= dim\ H(C_*(L)) \\ &\geq dim\ H_1(C_*(L)) = dim L/\,[L;L] \end{aligned}$$

$\square$

Remarque:
Si L est abélienne alors $Ext_{UL}(\mathbb{k},\mathbb{k}) = \Lambda sL$ donc
$dim(Ext_{UL}(\mathbb{k},\mathbb{k})) \geq dim(L)$

Theorem

Si $L = L^{even}$ *alors*

$$\dim V \leq dim\ H^*(\Lambda V, d)$$

Theorem 1. If $(\Lambda V, d)$ is an elliptic and 1-connected coformal minimal Sullivan model whose associated Quillen model L is concentrated on even degrees (i.e., $L = L^{even}$), then
$\dim V \leq dim\ H^*(\Lambda V, d)$
Remarque:
In fact, the result of C. Deninger and W. Singhof is established for ungraded Lie algebras (graded Lie algebras concentrated in degrees 0), however it can be extended to graded Lie algebras concentrated in even degrees.
Indeed, one may forgot the graduation since the antisymmetry of the Lie bracket and the identity of Jacobi are the same.

Exemples

$1/\ \dim L = 3$ et $|e_1| = 4; |e_2| = 6; |e_3| = 10$
$[e_1, e_2] = e_3; [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0 \qquad$ (e_1 et e_2 est une base de $L/[L;L]$ et e_3 base de $[L;L]$)
$0 \longrightarrow \Lambda^3 sL \longrightarrow \Lambda^2 sL \longrightarrow sL \longrightarrow 0$
$\partial se_1 = \partial se_2 = \partial(se_1 \Lambda se_2 \Lambda se_3) = \partial(se_1 \Lambda se_3) = \partial(se_2 \Lambda se_3) = 0$
$dim\ H(C_*(L)) = 5$
$2/\ \dim L = 3$ et $|e_1| = 1; |e_2| = 2; |e_3| = 4$
$[e_1, e_1] = e_2 \qquad$ (e_1 et e_3 est une base de $L/[L;L]$ et e_2 base de $[L;L]$)
$[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = [e_2, e_2] = [e_3, e_3] = 0.$
$\partial se_1 = \partial se_3 = \partial(se_1 \Lambda se_3) = 0$
$dim\ H(C_*(L)) = 3$

Exemples

3/ $\dim L = 3$ et $|e_1| = 3; |e_2| = 5; |e_3| = 8$
$[e_1, e_2] = e_3; [e_1, e_1] = [e_2, e_2] = [e_3, e_3] = 0. [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$ (e_1 et e_2 est une base de $L/[L;L]$ et e_3 base de $[L;L]$)
$\partial(se_1^{k_1}) = \partial(se_2^{k_2}) = 0$
$dim\ H(C_*(L)) = \infty$

Exemples

$4/ \dim L = 4 \; |e_1| = 2; |e_2| = 4; |e_3| = 6, |e_4| = 10$
$[e_1, e_2] = e_3; [e_1, e_3] = [e_1, e_4] = 0.$
$[e_2, e_3] = e_4; [e_2, e_4] = 0.$
$[e_3, e_4] = 0.$
$\partial se_1 = \partial se_2 = 0.$
$\partial(se_1 \Lambda se_3) = 0.$
$\partial(se_2 \Lambda se_4) = 0.$
$\partial(se_1 \Lambda se_3 \Lambda se_4) = 0.$
$\partial(se_2 \Lambda se_3 \Lambda se_4) = 0$
$\partial(se_1 \Lambda se_2 \Lambda se_3 \Lambda se_4) = 0.$
$dim \; H(C_*(L)) = 7$

Supposons que $\dim L = n$ et $L = L^{even}$

Remarquons que $L \cong [L, L] \oplus L/[L, L]$

$\{e_1, e_2, ..., e_p, ..., e_q, ..., e_{q+p}\}$une base de $L/[L, L]$ avec $2 \leq p \leq q$

$\{e_{q+p+1}, ..., e_{q+2p}\}$une base de $[L, L]$

telles que:

$[e_i, e_j] = 0$ pour $i \leq j \leq q$ ou $q + 1 \leq i \leq j \leq n = q + 2p$

$[e_i, e_{q+i}] = e_{q+p+i}$ $1 \leq i \leq p$ tous les autre nuls

$$d(se_1^{\epsilon_1} \Lambda\ se_2^{\epsilon_2} \Lambda ... \Lambda\ se_q^{\epsilon_q}) = \sum_{1 \leq i < j \leq q} (-1)^{\left|se_1^{\epsilon_1}\right| + \left|se_2^{\epsilon_2}\right| + ... \left|se_i^{\epsilon_i}\right|} s[e_i, e_j]\ \Lambda$$

$$se_1^{\epsilon_1} \Lambda ... \Lambda\ \widehat{se_i^{\epsilon_i}} \Lambda ... \Lambda\ \widehat{se_j^{\epsilon_j}} \Lambda ... \Lambda\ se_q^{\epsilon_q}$$

$$= 0$$

$$d(se_{q+1}^{\epsilon_{q+1}} \Lambda\ se_{q+2}^{\epsilon_{q+2}} \Lambda ... \Lambda\ se_{q+p}^{\epsilon_{q+p}}) = 0 \qquad (\ \epsilon_i = 0 \text{ ou } \epsilon_i = 1)$$

$$d(se_i \Lambda\ se_{q+i} \Lambda\ se_{q+p+i}) = 0 \ \text{ avec } 1 \leq i \leq p$$

donc $\dim H_*(C_*(L, 0)) \geq 2^q + 2^p + p - 2 \geq n$