Cocatégorie de Ganéa en homotopie rationnelle

MANSOURI Mohammed Wadia

01 février 2014

Plan

- **LS-catégorie**
  1. **Une caractérisation de Ganéa**
  2. **LS-catégorie rationnelle**
- **Cocatégorie**
  1. **Définition**
  2. **La construction Cofibre-fibre**

Cocatégorie de Ganea

Ganea associe à chaque espace X une suite d'espaces $G_n(X)$ et d'applications continues $J_n : X \longrightarrow G_n(x)$. Il définit la cocatégorie de l'espace X ; invariant homotopique noté *cocat* X ; comme dual au sens de Eckmann-Hilton de la LS-catégorie de X .
Toomer démontre que cette construction commute à la localisation en 0 $G_n(X_0) \sim G_{n0}(X)$ et obtient ainsi une première approximation

$$Nil\, \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q} \leq cocat \;\; X_0 \leq cocat \;\; X,$$

où $Nil\, \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ désigne la nilpotence de l'algèbre de Lie d'homotopie de X.
Cette inégalité suggère d'utiliser la longueur des crochets dans le modèle de Quillen de l'espace X pour calculer ou approximer cocat X_0.

Modèle de Quillen de la fibre homotopique

Étant donné une application $f : E \longrightarrow B$, on peut toujours lui associer un modèle de Quillen surjectif

$$(\mathbb{L}(U \oplus V), \partial) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{L}(V), \overline{\partial}) \longrightarrow 0.$$

L'espace $Ker\,\pi$ muni de la différentielle induite est un modèle de la fibre homotopique. $Ker\,\pi$, est une algèbre de Lie libre ; il existe donc un espace vectoriel gradué W tel que $Ker\,\pi = \mathbb{L}(W)$. Le Lemme suivant décrit W.

Lemme [R.Cohen, J.C.Moore, et A.Neisendorfer]

Toute suite exacte d'algèbres de Lie libres

$$0 \longrightarrow \mathbb{L}(W) \xrightarrow{j} \mathbb{L}(U) \xrightarrow{\pi} \mathbb{L}(V) \longrightarrow 0,$$

est scindée. De plus il existe une section σ de π telles que $\sigma(V) \subset U$.
Posons $U = K \oplus \sigma(V)$, alors W admet une structure de $T(V)$-module et il existe un isomorphisme de $T(V)$-module

On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & Ker\,\pi \arrow[d, "\simeq"'] \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{L}(T(V)\otimes U) \arrow[r, "k"] & \mathbb{L}(U\oplus V) \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{L}(V) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

avec k est l'application linéaire définie par :

$$\begin{cases} k(u) = u & \forall u \in U, \\ k(v_1 \otimes v_2 ... \otimes v_n \otimes u) = [v_1, [v_2, ..., [v_n, u]...] & \forall v_i \in V \quad et \quad \forall u \in U. \end{cases}$$

Nous allons munir $\mathbb{L}(T(V)\otimes U)$ d'une différentielle δ telle que $k \circ \delta = \partial \circ k$.

La différentielle δ

Définiton

Considérons l'application linéaire $\hat{a}d$ définie sur $U \oplus V$ par

- sur U

$$\begin{array}{rccc} \hat{a}d : & U & \longrightarrow & Der\mathbb{L}(T(V) \otimes U), \\ & u & \longmapsto & \hat{a}d_u = [u, \cdot] \end{array}$$

- sur V. Pour $v \in V$, $\hat{a}d_v$ désigne l'unique dérivation prolongeant l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \hat{a}d_v : & T(V) \otimes U & \longrightarrow & T(V) \otimes U \\ & \alpha & \longmapsto & v \otimes \alpha. \end{array}$$

On prolonge $\hat{a}d$ sur $\mathbb{L}(U \oplus V)$ en un morphisme d'algèbres de Lie.

où $(Der\mathbb{L}(T(V) \otimes U), \widehat{\partial})$ désigne l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathbb{L}(T(V) \otimes U)$. Avec :
$[\theta_1, \theta_2] = \theta_1\theta_2 - (-1)^{|\theta_1||\theta_2|}\theta_2\theta_1 \quad$ *où* $\quad |\theta_i| =$ *degré de* θ_i et
$\widehat{\partial}\theta_1 = [\partial, \theta_1]$.

Proposition

La différentielle δ est définie sur $\mathbb{L}(T(V)\otimes U)$ par :

$$\begin{cases} \delta u = \partial u & \forall u \in U \\ \delta \hat{a}d_v(\varphi) = \hat{a}d_{\partial v}(\varphi) + (-1)^{|v|}\hat{a}d_v(\delta\varphi) & \forall v \in V \text{ et } \forall \varphi \in T(V)\otimes U. \end{cases}$$

Comme l'application k est injective, il suffit de vérifier la propriété suivante de $\hat{a}d$.

Lemme

Pour tout $\alpha \in \mathbb{L}(U\oplus V)$ et $\varphi \in \mathbb{L}(T(V)\otimes U)$ on a :

$$k(\hat{a}d_\alpha(\varphi)) = [\alpha, k(\varphi)]. \qquad (*)$$

La construction cofibre-fibre

Soit $S \xrightarrow{f} S' \xrightarrow{q} C_f$ une cofibration, notons F_q la fibre homotopique de l'application q. Comme $q \circ f \simeq 0$, f se reléve en $g\ : S \longrightarrow F_q$, notons C_g la cofibre homotopique de g.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & F_q & \longrightarrow & C_g \\
 & g \nearrow & \downarrow & & \\
S & \xrightarrow{f} & S' & \xrightarrow{q} & C_f .
\end{array}
$$

Donnons un modèle de Quillen de chaque étape de cette construction .

Partant d'un modèle minimal de l'application f ;
$(\mathbb{L}(U),\partial) \xrightarrow{\widetilde{f}} (\mathbb{L}(W),\partial')$, il existe un espace vectoriel gradué V et un quasi-isomorphisme μ rendant commutatif le diagramme :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & (\mathbb{L}(W),\partial') & & \\
 & \nearrow & \uparrow \mu & & \\
(\mathbb{L}(U),\partial) & \longrightarrow & (\mathbb{L}(U\oplus V),D) & \longrightarrow & (\mathbb{L}(V),\overline{D}).
\end{array}
$$

Dans ce cas $(\mathbb{L}(V),\overline{D})$ est le modèle minimal de la cofibre C_f.
Si la suite $(\mathbb{L}(U),\partial) \longrightarrow (\mathbb{L}(U\oplus V,D) \xrightarrow{q_0} (\mathbb{L}(V),\overline{D})$ est un modèle de Quillen de la cofibration, alors la fibre F_q a pour modèle de Quillen $(\mathbb{L}(T(V)\otimes U),\delta)$.

$T(V)\otimes U$ se décompose sous la forme $U\oplus T^{+}(V)\otimes U$ et d'après les propriétés de la différentielle δ, l'injection $\mathbb{L}(U)\longrightarrow\mathbb{L}(U\otimes T^{+}(V)\otimes U)$ est un homomorhisme a.l.d.g.. Un modèle de Quillen de la cofibration $S\xrightarrow{g}F_p\longrightarrow C_g$ est donné par

$$(\mathbb{L}(U),\partial)\longrightarrow(\mathbb{L}(U\oplus T^{+}(V)\otimes U),\delta)\xrightarrow{q_1}(\mathbb{L}(T^{+}(V)\otimes U,\overline{\delta}),$$

avec

$$q_1(u)=0 \quad , \ si \quad u\in U,$$

$$q_1(\varphi)=\varphi \quad , \ si \quad \varphi\in T^{+}(V)\otimes U,$$

et $(\mathbb{L}(T^{+}(V)\otimes U,\overline{\delta})$ est un modèle de Quillen de C_g. D'où un diagramme qui mime la construction topologique

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{L}(U\oplus T^{+}(V)\otimes U),\delta) \arrow[r, "q_1"] \arrow[d, "k"'] & (\mathbb{L}(T^{+}(V)\otimes U,\overline{\delta}) \\
(\mathbb{L}(U),\partial) \arrow[ur] \arrow[r, hook] & (\mathbb{L}(U\oplus V),D) \arrow[r, "q_0"] & (\mathbb{L}(V),\overline{D})
\end{tikzcd}$$

Modèle de Quillen des espaces de Ganéa

Les générateurs des modèles de Quillen des différents espaces de Ganea, ainsi que leur différentielles , s'obtiennent par itération des constructions de la section précédente. Plus précisément, On a :

Théorème

Soient X un espace topologique et $(\mathbb{L}(U), \partial)$ son modèle de Quillen. Posons

$$\begin{cases} V_0 = sU \\ V_n = T^+(V_{n-1}) \otimes U) \quad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Alors, Pour tout $n \geq 0$, il existe une différentielle ∂_n telle que $(\mathbb{L}(U \oplus V_n), \partial_n)$ soit un modèle de Quillen du n-iéme espace de Ganéa $G_n(X)$ de X.

Lemme

La cofibration canonique, $X \longrightarrow CX \longrightarrow \Sigma X$ a pour modéle de Quillen

$$(\mathbb{L}(U), \partial) \xrightarrow{i_0} (\mathbb{L}(U \oplus sU), \partial_0) \xrightarrow{q_0} (\mathbb{L}(sU), 0).$$

Avec i_0 et q_0, définis canoniquement et $\partial_0 u = \partial u$, $\partial_0 su = u - \theta(u)$ où $\theta(u)$ est un élément de l'algébre de Lie $\ker q_0$.

Comme corollaire du Théorème on a les diagrammes suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & (\mathbb{L}(U \oplus V_n), \partial_n) & & \\ & i_n \nearrow & \downarrow k_n & & \\ (\mathbb{L}(U), \partial) & \xrightarrow{i_{n-1}} & (\mathbb{L}(U \oplus V_{n-1}), \partial_{n-1}) & \xrightarrow{q_{n-1}} & (\mathbb{L}(V_{n-1}), \overline{\partial_{n-1}}) \end{array}$$

et $cocat(X_0)$ est le plus petit entier n tel que l'injection i_n admet une rétraction homotopique.

Relation entre $cocat(X_0)$ et $cocat_0(X)$.

Théorème

1. On a $cocat(X_0) \leq cocat_0(X)$.
2. Si $cocat_0(X) \leq 2$, alors $cocat(X_0) = cocat_0(X)$.

Démonstration

Nous construisons s_n, homomorphisme d'a.l.d.g. rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & (\mathbb{L}(U \oplus V_n), \partial_n) \\ & i_n \nearrow & \downarrow s_n \\ (\mathbb{L}(U), \partial) & \xrightarrow{q_n} & (\mathbb{L}(U)/\mathbb{L}^{>n}(U), \overline{\partial}). \end{array}$$

Considérons t_n l' homomorphisme d'algèbres de Lie graduées défini par :

$$t_n : \mathbb{L}(U \oplus V_n) \longrightarrow \mathbb{L}(U),$$

tel que

$$t_n(U) = U \quad et \quad t_n(V_n) = 0.$$

MERCI POUR VOTRE ATTENTION