Approximation de de l'ensemble des algorithmes de planification de mouvement

$1^{\grave{e}re}$ partie : propriétés topologiques de l'ensemble des algorithmes de planification de mouvement

Younes Derfoufi

CRMEF OUJDA

01 Fev 2014

Introduction

Le but de ce travail c'est de donner des méthodes d'approximations des algorithmes de planifications de mouvements. Bien que Michael Farber et ses compagons ont donné des résultats étonnants sur ce sujet, on pourait même dire qu'ils ont érigé un nouveau courant de recherche liant la théorie de la robotique à la théorie de l'homologies et de l'homotopie, jusqu'à présent ils 'ont pas donné des méthodes pour approximer ces algorithmes, ni même une méthode pour la détermination explicite ! Nous nous somme engagé à détérminer des méthodes pour les approximer à l'aide des algorithmes simples comme par exemple les algorithmes de planification de mouvement affine par morceau, pour cela nous avons subdiviser le travail en deux partie, la première sera consacrée aux propriétés topologiques de l'ensemble des algorithmes de planification de mouvement, tandis que la seconde sera consacré ausx différentes méthodes d'approximations.

Algorithme de planification de mouvement

Dans tout ce paragraphe X designe un espace topologique connexe par arc, et $PX = \{\gamma : [0,1] \longrightarrow X\}$ l'espace des chemins continues sur X. On définit l'application $\pi : PX \longrightarrow X \times X$ par $\gamma \longrightarrow (\gamma(0), \gamma(1))$. (PX est équipé de la topologie compacte ouverte)

Definition

Un algorithme de planification de mouvement est une application continue $s : X \times X \longrightarrow PX$ verifiant : $\pi \circ s = Id_{X \times X}$

Theorem

Un algorithme de planification de mouvement $s : X \times X \longrightarrow PX$ *existe si et seulement si* X *est contractil*

Complexité topologique d'un espace de configuration.

Soit X un espace topologique et $PX = \{\gamma : [0,1] \longrightarrow X\}$ l'espace des chemins continues de X. On définit la projection $\pi : PX \longrightarrow X \times X$ (Fibration de Serre) par $\gamma \longrightarrow (\gamma(0), \gamma(1))$. (PX est équipé de la **topologie Compacte Ouverte** (ie **compact open topology**)

Definition

La complexité topologique de X est le plus petit entier k pour lequel Il existe un recouvrement Ouvert $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ de $X \times X$ tel que :
Pour tout $i \in \{1, ..., k\}$ il existe une **locale section** $s_i : U_i \longrightarrow PX$ (ie application continue s_i : $s_i : U_i \longrightarrow PX$ telle que $\pi \circ s_i(x) = x \quad \forall x \in U_i$)
On écrit alors $TC(X) = k$ (S'il n'existe aucun entier k verifiant les conditions ci-dessus on pose $TC(X) = \infty$)

Complexité topologique d'un espace de configuration.

Proposition

$(TC(X) = 1) \Longleftrightarrow X \quad est\ contractil$

Proof.

Voir [1] □

Example

Si $X = \{x_0\}$ alors $TC(X) = 1$

Example

Si C est une partie convexe d'un **evn** alors $TC(C) = 1$, en particulier pour toute boule **B** d'un evn **E** on a $TC(B) = 1$

Example

$TC(S^1) = 2$

Dans tout ce paragraphe X designe un espace vectoriel normé, et par suite la topologie compacte ouverte définie sur PX coïncide avec celle de la convergence uniforme définie par la norme $||\gamma||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} ||\gamma(t)||$

Notation

On note $C(X \times X, PX)$ l'espace des fonctions continues de $X \times X$ dans PX.
Pour tout compact K de $X \times X$ on note P_K la semie norme définie sur $C(X \times X, PX)$ par $P_K(f) = \sup_{(A,B)\in K} (\sup_{0\leq t\leq 1} ||f(A,B)(t)||)$ et par $B_{P_K}(f, \varepsilon)$ la semie boule de centre $f \in C(X \times X, PX)$ et de rayon ε définie par $B_{P_K}(f, \varepsilon) = \{g \in C(X \times X, PX) / P_K(f - g) < \varepsilon\}$.

Algorithme de planification de mouvement

On munit ensuite $C(X \times X, PX)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, ie la topologie définie par la famille des semie normes $(P_K)_K$ dont les ouverts sont des réunions quelconque d'intersections finies de semies boules ouvertes.

Notation

On note $C_0(X \times X, PX)$ l'espace vectoriel formé des applications $f \in C(X \times X, PX)$ vérifiant : $f(A, B)(0) = f(A, B)(1) = 0_X$

Notation

on note l'ensemble des algorithme de planification de mouvement (motion planning algorithm) sur X par $MPA(X \times X, PX)$, si K est une partie non vide de X on note l'ensemble des algorithmes de planification de mouvement sur K par $MPA(K \times K, PX)$.

Structure de variété affine de l'ensemble des algorithmes de planification de mouvement

Proposition

Pour tout $s \in MPA(X \times X, PX)$ *on a :*
$MPA(X \times X, PX) = s + C_0(X \times X, PX)$. $MPA(X \times X, PX)$ *est donc une variété affine de direction l'espace vectoriel* $C_0(X \times X, PX)$

Proposition

$C(X \times X, PX)$ *est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé.*

Structure de variété affine de l'ensemble des algorithmes de planification de mouvement

Proof.

Soient $f, g \in C(X \times X, PX)$ tels que $f \neq g$ il existe donc $(x, y) \in X$ tel que $f(x, y) \neq g(x, y)$ et comme PX est séparé (espace métrique) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x, y), \varepsilon) \cap B(g(x, y), \varepsilon) = \varnothing$ et en considérant maintenant le compact $K = \{(x, y)\}$ on a :
$B_{P_K}(f, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B_{P_K}(g, \frac{\varepsilon}{2}) = \varnothing$ $\square$

Conséquences Immediates

Corollary

$C(X \times X, PX)$, $MPA(X \times X, PX)$ et $C_0(X \times X, PX)$ sont des espaces réguliers

Proof.

Il suffit de rearquer que dans un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, l'origine admet un système fondamental de voisinages équilibrés ouverts et un système fondamental de voisinages équilibrés fermés [10], et donc à fortiori $C(X \times X, PX)$ est régulier. $C_0(X \times X, PX)$ et $MPA(X \times X, PX)$ sont des sous espaces d'un espace régulier sont donc réguliers. □

Complétion séquentielle

Proposition

$C(X \times X, PX)$ est un espace uniforme séquentiellement complet.

Proof.

La topologie de $C(X \times X, PX)$ est définie par la famille de semi-distances $d_K(s, s') = P_K(s - s')$ et donc semi métrisable et par suite uniformisable [10]. Montrons maintenant que $C(X \times X, PX)$ est complet, soit alors $(s_n)_n$ une suite de cauchy de $C(X \times X, PX)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout compact K de $X \times X$ il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\square$

Complétion séquentielle (suite de la démonstration)

$$m > n \geq N \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} ||s_m(A,B)(t) - s_n(A,B)(t)|| < \varepsilon \\ \forall (A,B,t) \in K \times [0,1] \end{array} \right. \quad (*)$$

Le compact K étant quelconque ce qui prouve que pour tout $(A,B) \in X \times X$ la suite $s_n(A,B)$ est de cauchy dans PX lequel est complet donc elle est convergente soit alors $s(A,B)$ sa limite. En faisant tendre $m \longrightarrow \infty$ dans la relation $(*)$ ci-dessus, on obtient :
$n \geq N \Longrightarrow P_K(s_n - s) < \varepsilon \quad cqfd$

Structure uniforme de l'ensemble des algorithmes de planification de mouvement

Corollary

$MPA(X \times X, PX)$ et $C_0(X \times X, PX)$ sont des sous espaces uniformes séquentiellement complets de l'espace $C(X \times X, PX)$

Proof.

Compte tenu de la **proposition 13** il suffit de prouver cela pour $C_0(X \times X, PX)$ puis que $MPA(X \times X, PX)$ *et* $C_0(X \times X, PX)$ sont homéomorphes. Soit alors $(s_n)_n$ une suite de cauchy de $C_0(X \times X, PX)$. $(s_n)_n$ est donc une suite de cauchy de l'espace uniforme séquentiellement complet $C(X \times X, PX)$, donc elle convrge vers un élément $s \in C(X \times X, PX)$. D'autre part on a $s_n(A, B)(0) = s_n(A, B)(1) = 0_X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$ on obtient : $s(A, B)(0) = s(A, B)(1) = 0_X$ et par suite $s \in C_0(X \times X, PX)$ *cqfd*. □

Convexité de MPA(X x X , PX).

Proposition

L'ensemble des algorithmes de planification de mouement $MPA(X \times X, PX)$ *est une partie convexe fermée de* $C(X \times X, PX)$

Proof.

Il suffit de remarquer que $MPA(X \times X, PX)$ est le translaté d'une partie convexe à savoir $C_0(X \times X, PX)$, donc convexe. Nous pouvons aussi démontrer cela rapidement d'une façon directe en prenant deux éléments s, s' de $MPA(X \times X, PX)$ et $\lambda \in [0, 1]$ on constate alors que $\lambda s + (1 - \lambda)s'$ est une application continue de $X \times X \longrightarrow PX$ d'autre part $[\lambda s + (1 - \lambda)s'](A, B)(0) = \lambda A + (1 - \lambda)A = A$ et $[\lambda s + (1 - \lambda)s'](A, B)(1) = \lambda B + (1 - \lambda)B = B$ ce qui prouve que $\pi \circ [\lambda s + (1 - \lambda)s'] = Id_{X \times X}$. D'après le corollaire précédent, $MPA(X \times X, PX)$ est fermée dans $C(X \times X, PX)$ puisqu'il est complet. *cqfd* □

Barycentre de deux algorithmes de PMVT

Corollary

L'interieur de $MPA(X \times X, PX)$ *est un ouvert convexe homéomorphe à* $C(X \times X, PX)$

Proof.

Il suffit de remarquer que l'interieur de $MPA(X \times X, PX)$ est un ouvert convexe de l'espace vectoriel topologique $C(X \times X, PX)$ qui est localement convexe et que dans un evt lc les ouverts convexe sont homéomorphe à l'espace tout entier [10] $\square$

Corollary

Le barycentre de deux algorithmes de planification de mouvement est un algorithme de planification de mouvement

Proposition

Si X est dénombrable à l'infini alors $C(X \times X, PX)$ est un espace de Fréchet

Proof.

On a déjà prouvé que $C(X \times X, PX)$ est lacalement convexe et complet au sens des espaces uniformes, il reste à prouver qu'il est métrisable. Pour cela nous allons prouver que sa topologie puisse être définie par une famille dénombrable de semis distances. $\square$

Suite de la démonstration

X étant dénombrable à l'infini donc il existe une famille de compacts $(K_p)_p$ de $X \times X$ croissante au sens de l'inclusion telle que $X \times X = \bigcup\limits_p K_p$ il est clair que la topologie définie par la famille $(P_{K_p})_p$ est moin fine que celle définie par la famille $(P_K)_K$ il suffit maintenant de prouver qu'un ouvert élémentaire de la forme $O = B_{P_K}(s, \varepsilon)$ où K est un compact de $X \times X$ et $s \in C(X \times X, PX)$ est aussi un voisinage de s pour la topologie définie par la famille $(P_{K_p})_p$. En effet il existe un entier p tel que $K \subset K_p$ et par suite $B_{P_{K_p}}(s, \varepsilon) \subset B_{P_K}(s, \varepsilon)$ *cqfd*

Structure d'espace tonnélé

Corollary

$C_0(X \times X, PX)$ *est un espace de Frechet*

Corollary

$MPA(X \times X, PX)$ *est le translaté d'un sous espace de Frechet de* $C(X \times X, PX)$

Corollary

$C_0(X \times X, PX)$ *est un espace tonnélé (tout tonneau est un voisinage de* 0 *)*
(un tonneau de $C_0(X \times X, PX)$ *est un sous ensemble convexe, fermé, absorbant et équilibré)*

Structure d'espace bornologique

Corollary

Si X est dénombrable à l'infini alors $C_0(X \times X, PX)$ est bornologique (ie toute partie convexe équilibrée M qui absorbe les parties bornées : ($\forall B$ bornée de $C_0(X \times X, PX)$ $\exists \alpha > 0$ tel que $|\lambda| \leq \alpha \Longrightarrow \lambda B \subset M$) est un voisinage de zéro)

Conséquences

Conséquence1

L'ensemble des algorithmes de planification de mvt MPA est homéomorphe à un sous espace tonnélé de $C(X \times X, PX)$

Conséquence2

L'ensemble des algorithmes de planification de mvt MPA est homéomorphe à un sous espace bornologique de $C(X \times X, PX)$

Problèmes soulevés

Pb1

$C_0(X \times X, PX)$ est - il un espace de Montel ? (ie tonnélé et dont tout fermé et borné est un compact)

Pb2

Si X n'est pas dénombrable à l'infini $C_0(X \times X, PX)$ est - il un espace bornologique ?

Bibliographie

[1]. Michael Farber, Topological Complexity of Motion Planning, Discrete Comput Geom 29:211–221 (2003), Springer Verlag New York Inc

[2]. I. M. JAMES, On category, in the sense of Lusternik-Schnirelman, , Topology. Vol. 17. pp. 331-343 Press Ltd.. 1978.

[3]. Michael Farber, Invitation to topological robotics, Zurich Lecturs in Advenced Mathematics, European Mathematical Society.

[4]. MICHAEL FARBER AND MARK GRANT, Topological complexity of configuration spaces, arXiv:0806.4111V1 25 Jun 2008

[5]. Gregory Lupton and Jérôme Scherer, Topological Complexity of H - Space, Mathematics Subject Classi cation 2010

[6]. IBAI BASABE, JES´ US GONZ´ ALEZ, YULI B. RUDYAK, AND DAI TAMAKI, Higher topological complexity of configuration spaces on sphere. arXiv:1009.1851v4[math.AT] 8 Apr 2011

Bibliographie

[7] Amin Saif and Adem Kılıçman. On classifying Hurewicz fibration and free Bundles over Polyhedron bases. Institute of Mathematical Rsearch (INSPEM), arXive:1008.3959v1 [math.AT] 24 Aug 2010
[8] Yuli B. Rudyac. On Higher Analogs of Topological Complexity. arcXiv:0909.1616v3 [math.AT]
[9] Mark Grant, Gregory Lupton and John Opera, Space of Topoloical complexity One. arXiv:1207.4725v1 [math.AT] 19 Jul 2012
[10] Laurent Schwartz, Topologie générale et analyse fonctionnelle .Enseignement Des Sciences. Hermann
[11] Larry L.Schumaker, Spline Function : Basic Theory. Cambridge, University Press
[12] Haîm Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et applications. Masson Paris
[13] N.Bourbaki, éléments de mathématiques, Topologie générale chapitre de 1 à 4. Hermann
[14] N.Bourbaki, éléments de mathématiques, Topologie générale chapitre de 5 à 10. Hermann
[15] N.Bourbaki, éléments de mathématiques, Espace vectoriels topologiques