La cocatégorie rationnelle d'un espace

Définitions et propriétés (Partie *2)*

BEN EL KRAFI BADR

FACULTE DES SCIENCES AIN CHOK

Rabat 01/02/2014

Outils

- Algèbres de LIE différentielles graduées.

Outils

- Algèbres de LIE différentielles graduées.
- Morphismes d'algèbre de LIE

Outils

- Algèbres de LIE différentielles graduées.
- Morphismes d'algèbre de LIE
- Algèbres de LIE libre

Outils

- Algèbres de LIE différentielles graduées.
- Morphismes d'algèbre de LIE
- Algèbres de LIE libre
- Modèle de Quillen

Outils

- Algèbres de LIE différentielles graduées.
- Morphismes d'algèbre de LIE
- Algèbres de LIE libre
- Modèle de Quillen
- Rétraction

La cocatégorie

- Cocatégorie d'un ldg

La cocatégorie

- Cocatégorie d'un ldg
- cocatégorie rationnelle d'un espace topologique

La cocatégorie

- Cocatégorie d'un ldg
- cocatégorie rationnelle d'un espace topologique
- La nilpotence d'une alg

La cocatégorie

- Cocatégorie d'un ldg
- cocatégorie rationnelle d'un espace topologique
- La nilpotence d'une alg
- Cocatégorie et nilpotence

La cocatégorie

- Cocatégorie d'un ldg
- cocatégorie rationnelle d'un espace topologique
- La nilpotence d'une alg
- Cocatégorie et nilpotence
- Cocatégorie d'une adgc

Définition de LDG

Definitions

Une algèbre de LIE différentielle graduée est un evg $L = \bigoplus_{p \geq 0} L_p$ muni d'une application bilinéaire de degré zéro,

$$[.,.] : L \otimes L \longrightarrow L$$

telles que:

$$[x, y] = (-1)^{|x||y|+1} [y, x] \quad \text{antisymétrie}$$

$$(-1)^{|x||z|} \ [x, [y, z]] + (-1)^{|y||x|} \ [y, [z, x]] + (-1)^{|z||y|} \ [z, [x, y]] = 0$$

Identité de Jacobi

Definition

Une différentielle ∂ vérifiant:

$$\partial L_p \subset L_{p-1}$$

$$\partial \circ \partial = 0 \quad et \quad \partial [x, y] = [\partial x, y] + (-1)^{|x|} [x, \partial y]$$

Soit LDG la catégorie des algébres de LIE différentielles graduées

Définition de morphismes et quasi- isomorphismes de ldg

Definition

un morphisme $f : (L, \partial) \rightarrow (L', \partial')$ entre deux algèbres de LIE différentielles graduées est une application linéaire de degré zéro vérifiant:

$$f\partial = \partial' f$$

$$f\,[x, y] = [f(x), f(y)]$$

Definition

Un quasi- isomorphisme entre (L, ∂) et (L', ∂') est un morphisme induisant un isomorphisme en homologie

Exemple de ldg

soit A une algèbre différentielle graduée augmentée, on associe à A une algèbre de LIE différentielle graduée $\overline{A}_L$.
$\overline{A}_L$ est l'espace vectoriel $\overline{A}$ muni du crochet commutateur:

$$[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|}yx$$

Remarque:
si A est commutative alors $\overline{A}_L$ est abélienne.

Definition

L'algèbre de LIE libre $\mathbb{L}(V)$ est la sous algèbre de LIE de $\overline{T(V)}_L$engendré par V.

Definitions

Un LDG-modèle de (L', ∂') est le couple $((L, \partial), \Psi)$ où (L, ∂) est une ldg et Ψ une équivalence faible

$$\Psi \ : \ (L, \partial) \to (L', \partial')$$

Le LDG$_1$- modèle (L, ∂) est minimal si :
(i) L est libre : il existe un $\mathbb{k}$- espace vectoriel gradué V tel que $L = \mathbb{L}(V)$.
(ii) La différentielle ∂ est décomposable :$\partial(V) \subset [\mathbb{L}(V), \mathbb{L}(V)]$

Modèle de QUILLEN d'une ldg

Definition

Un modèle minimal de QUILLEN est un LDG-modèle $((L, \partial), \Psi)$ minimal.

Theorem

Toute ldg 1-réduite admet un modèle minimal de QUILLEN $((L, \partial), \Psi)$ à isomorphisme près.

Example

Si (L', ∂') est de type fini, $L_* C^*(L', \partial')$ est un modèle de QUILLEN de (L', ∂')

Modèle de QUILLEN d'un espace topologique

Definition

Soit X un espace topologique
Un modèle de QUILLEN de X est le couple $((\mathbb{L}(W), \delta), \Psi)$ où :

$$\Psi : C^*(\mathbb{L}(W), \delta) \longrightarrow A_{PL}(X)$$

est une équivalence faible dans ADGC

Si le modèle est minimal alors:

$$W_n \cong \widetilde{H}_{n+1}(X, \mathbb{Q}) \text{ et } H_n(\mathbb{L}(W), \delta) \cong \pi_n(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$$

Espace formel et coformel

Definitions

Une adgc (A, d_A) à cohomologie 1-connexe de type fini ,est formelle si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite:
i/ Son algèbre $(H^*(A, d_A), 0)$ à même type d'homotopie que (A, d_A).
ii/ Le modèle de Quillen de (A, d_A) est à différentielle purement quadratique

Definitions

Une ldg (L, ∂),1-réduite,à homologie de type fini, est coformelle si l'une des coditions équivalentes suivantes est satisfaite:
i/ Son algèbre de Lie d'homologie $(H_*(L, \partial), 0)$ à même type d'homotopie que (L, ∂).
ii/ (L, ∂) à un modèle de Sullivan à différentielle purement quadratique.

Definition

Soient (L,∂) et (L',∂') deux ldg et $((\mathbb{L}(V),\delta),\Psi)$, (resp$((\mathbb{L}(V'),\delta'),\Psi')$) un modèle de QUILLEN de (L,∂) , (resp de (L',∂')).
Soit h un morphisme de ldg : $(L,\partial) \to (L',\partial')$
h fait de (L,∂) un rétracte de (L',∂') s'il existe α et α' deux morphismes de ldg tels que le diagramme suivant soit commutative à homotopie près:

$$\begin{array}{ccccc} (L,\partial) & \xrightarrow{h} & (L',\partial') & & \\ \Psi\uparrow & \circlearrowleft H & \uparrow\Psi' & & \\ (\mathbb{L}(V),\delta) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathbb{L}(V'),\delta') & \xrightarrow{\alpha'} & (\mathbb{L}(V),\delta) \end{array}$$

$h\circ\Psi \sim \Psi'\circ\alpha$
$\alpha'\circ\alpha \sim Id_{\mathbb{L}(V)}$

La cocatégorie d'un ldg

Definition

Soit (L, ∂) un ldg et $(\mathbb{L}(V), \delta)$ son modèle minimal de QUILLEN
on appelle cocatégorie de (L, ∂) le plus petit entier n noté $cocat(L, \partial)$ tel que:
$\Pi_n : \mathbb{L}(V) \to \mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{\geq n+1}(V)$ admet une rétraction homotopique
si non $cocat(L, \partial) = \infty$

$$\begin{array}{ccccc}
(\mathbb{L}(V), \partial) & \xrightarrow{\Pi_n} & (\mathbb{L}(V) / \mathbb{L}^{\geq n+1}(V), \bar{\partial}) & & \\
Id \uparrow & \circlearrowleft H & \uparrow \Psi' & & \\
(\mathbb{L}(V), \partial) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathbb{L}(W), d) & \xrightarrow{\alpha'} & (\mathbb{L}(V), \partial)
\end{array}$$

$\Psi' \circ \alpha \sim \Pi_n$ et $\alpha' \circ \alpha \sim Id_{\mathbb{L}(V)}$

Lemme

Lemma

Si $cocat(L, \partial) = n$ *alors* $H_*(\Pi_n)$ *est injective*

Proof.

- $H_*(\Psi') \circ H_*(\alpha) = H_*(\Pi_n)$

$\square$

Lemme

Lemma

Si $cocat(L, \partial) = n$ *alors* $H_*(\Pi_n)$ *est injective*

Proof.

- $H_*(\Psi') \circ H_*(\alpha) = H_*(\Pi_n)$
- $Id = H_*(\alpha') \circ H_*(\alpha) = H_*(\alpha') \circ H_*(\Psi')^{-1} \circ H_*(\ \Pi_n)$

□

Definition

Soit X un espace topologique
La cocatégorie rationnelle de X est notée: $Cocat_0(X)$ et définie par

$$Cocat_0(X) = Cocat(\mathbb{L}(V), \partial)$$

où $(\mathbb{L}(V), \partial)$ est un modèle de QUILLEN de X

Remarque: $Cocat_0(X)$ est un invariant de type de l'homotopie rationnelle de X

Examples

$Cocat_0(X) = 0 \iff X$ est contractile
$Cocat_0(X) = 1 \iff X$ a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-Mclane

La suite centrale descendante

Definition

Soit L une algèbre de LIE graduée;une filtration en longueur des crochets est une suite $(F^nL)_{n\geq 1}$ vérifiant

$$F^1L = L \text{ et } F^nL = \left[L, F^{n-1}L\right] \quad n \geq 2$$

Si $(\ L, \partial)$ est une ldg alors F^nL est stable par ∂
On pose $Q(L) = L/F^2L$ est l'espace des éléments indécomposables de L

Definition

La nilpotence d'une algèbre de LIE graduée est notée $Nil(L)$, et définie par:
$Nil(L) = \inf \left\{ n / F^{n+1} L = 0 \right\}$

Examples

1/ $\quad L = (\mathbb{L}(x), 0) \quad |x| = 2$ alors $Nil(L) = 1$
2/ $\quad L = K(\mathbb{Q}, 2) \times K(\mathbb{Q}, 2)$ alors $Nil(L) = \infty$

Remarque:
Il n'existe pas de relations entre $Nil(L)$ et $\sup \left\{ n / H_n(L, \partial) \neq 0 \right\}$

Theorem

1/ $Nil(H_*(L,\partial)) \leq cocat(L,\partial) \leq Nil(L)$

2/ $Nil(H_*(L,\partial)) \leq cocat(L,\partial) \leq \sup\{n \;/ H_n(L,\partial) \neq 0\}$

3/ *Si* (L,∂) *un rétracte de* (L',∂') *alors :* $cocat(L,\partial) \leq cocat(L^{'},\partial')$
4/ $cocat((L,\partial) \times (L^{'},\partial')) = \sup\;(cocat(L,\partial), cocat(L^{'},\partial'))$

Corollaires

Corollary

1/ $Cocat(L,0) = Nil(L)$

2/Si X *est un espace coformel alors:*

$$Cocat_0(X) = Nil(\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q})$$

Preuve du théorème

Proof.

$1/Nil(H_*(L,\partial)) \leq cocat(L,\partial) \leq Nil(L)$

- Posons $cocat(L,\partial) = n$

alors $H_*(\Pi_n)$ est injective donc:$\mathbb{L}^{\geq n+1}(V) \cap Ker\partial \subset \operatorname{Im}\partial$ donc $Nil(H_*(L,\partial)) \leq n$ $\square$

Proof.

- Posons $Nil(L) = p$

Soit $(\mathbb{L}(V), \partial) \xrightarrow{\Psi} (L, \delta)$ le modèle de Quillen de (L, δ)
alors Ψ induit un homomorphisme d'ldg $\overline{\Psi}\ : (\mathbb{L}(V)/\mathbb{L}^{\geq p+1}(V), \bar{\partial}) \xrightarrow{\overline{\Psi}} (L, \partial)$
D'aprés le lemme de relèvement,il existe deux homomorphismes d'ldg α et $\alpha^{'}$

$$\begin{array}{ccccc} (L, \delta) & \xleftarrow{\overline{\Psi}} & (\mathbb{L}(V)/\mathbb{L}^{\geq p+1}(V), \bar{\partial}) & \xleftarrow{\mu} & (\mathbb{L}(W), d) \\ \Psi \uparrow & & \uparrow \Pi & & \alpha^{'} \downarrow\uparrow \alpha \\ (\mathbb{L}(V), \partial) & \xleftarrow{Id} & (\mathbb{L}(V), \partial) & \xleftarrow{Id} & (\mathbb{L}(V), \partial) \end{array}$$

$\mu \circ \alpha \sim \Pi$ et $\Psi \circ \alpha^{'} \sim \overline{\Psi} \circ \mu$ donc $\Psi \circ \alpha^{'} \circ \alpha \sim \overline{\Psi} \circ \mu \circ \alpha \sim \overline{\Psi} \circ \Pi \sim \Psi$
d'où $\alpha^{'} \circ \alpha \sim Id$ $\square$

Definition

soit X un espace topologique,et $(\mathbb{L}(V), \partial)$ son modèle de Quillen
On pose $\epsilon_0(X) = \inf \left\{ p / \ \mathbb{L}^{\geq p+1}(V) \cap Ker\partial \subset \mathrm{Im}\,\partial \right\}$

Remarques
$1/\epsilon_0(X) = \inf \{ p / \ H(\Pi_p) \text{ est injective} \}$
$2/\epsilon_0(X)$ est un invariant de type de l'homotopie rationnelle de X

Examples

$1/ \ \epsilon_0(X) = 0 \iff X$ est contractile
$2/ \ \epsilon_0(X) = 1 \iff X$ a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-Mclane
$3/ \ \epsilon_0(S^{2n}) = 2$

Théorème

Theorem

1/ $Nil(\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}) \leq \epsilon_0(X) \leq Cocat_0(X)$
2/ Si X est coformel on a:

$$Nil(\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}) = \epsilon_0(X) = Cocat_0(X)$$

3/ Si X est formel on a:

$$\epsilon_0(X) = Cocat_0(X)$$

Soit $\rho : (\Lambda Z, d) \to (W, 0)$ le modèle minimal de Sullivan d'une adgc connexe.
Halperin et stasheff dans Obstruction to Homotopy Equivalences définissent une bigraduation sur ΛZ avec une graduation supplémentaire sur $Z : Z = \sum_{p=0}^{p=\infty} Z_p$ vérifiant:

$dZ_p \subset (\Lambda Z\ )_{p-1}$et ρ et bihomogène de degré $\binom{0}{0}$

$H(\rho) : H_0(\Lambda Z, d) \to W$ est un isomorphisme et $H_+(\Lambda Z, d) = 0$

3. THE BIGRADED MODEL FOR A C.G.A.

3.1. Construction. Let H be a connected c.g.a. (later to be thought of as $H(A)$). We can regard H as a c.g.d.a. by setting $d = 0$. As such we know it has a minimal model $\rho : (\Lambda Z, d) \to (H, 0)$

In fact $(\Lambda Z, d)$ is a purely algebraic construct closely related to a resolution of H by free commutative algebras, sometimes called the Tate resoltuion [3 I], (and extended to the graded case by Jozefiak [35] as we learned after this paper was accepted). We construct $(\Lambda Z, d)$ from this point of view. As pointed out by the referee, the analogous construction resolving H by free associative algebras is due to Lemaire [36, pp. 78-791. In this construction we exhibit a second natural gradation carried by ΛZ, to be called the lower gradation.(The lower gradation appears in another form in [30; proof of Theorem 12.71 and dually for coalgebras in work of J. C. Moore [23, 241 and in the associative setting in Lemaire.)

In fact we construct graded spaces $Z_0, Z_1, Z_2...$ so that $Z = \sum\limits_0^{\infty} Z_k$, and d is homogeneous of lower degree -1 with respect to the induced lower gradation of ΛZ. The map ρ will be defined on Z, (below) and extended to be zero on Z_n $n \geq 1$
We shall write

$$Z_{(n)} = Z_0 \oplus Z_1 \oplus ... \oplus Z_n$$

then each $\Lambda Z_{(n)}$ will be d stable, and the lower gradation of $\Lambda Z_{(n)}$,l will induce a lower gradation in $H(\Lambda Z_{(n)}, d)$:

$$H(\Lambda Z_{(n)}, d) = \sum_{p \geq 0, k \geq 0} H_k^p(\Lambda Z_{(n)}, d)$$

The Z_n 's and ρ and d will be constructed so the following conditions hold:
$(3.2)_1$ $\quad \rho \quad : \Lambda Z_0 \longrightarrow H$ is surjective.
$(3.2)_2$ $\quad \rho^* : H_0(\Lambda Z_0, d) \underset{\longrightarrow}{\approx} H$
$(3.2)_3$ $\quad \rho^* : H_0(\Lambda Z_n, d) \underset{\longrightarrow}{\approx} H$ and $H_i(\Lambda Z_n, d) = 0 \quad 0 \leq i \leq n \, , \, 2 \leq n$

Definition

$(\Lambda Z, d)$ est le modèle bigraduée de l'algèbre graduée commutative W

Modèle filtré d'une adgc et d'un espace topologique

Soit $\rho : (\Lambda Z, d) \to (H(A, d_A), 0)$ le modèle bigraduée de l'algèbre graduée commutative $H(A, d_A)$
Halperin et stasheff construisent un modèle de Sullivan
$\pi : (\Lambda Z, D) \to (A, d_A)$ de (A, d_A) vérifiant:
i/ $(D - d)(Z_n) \subset \bigoplus_{m \leq n-2} (\Lambda Z\ )_m \ n \geq 0$
ii/ La classe de cohomologie de $\pi(z)$ est égale à $\rho(z)$ pour $z \in Z_0$

Definition

$(\Lambda Z, D)$ est le modèle filtré de (A, d_A)
La filtration $F_n \Lambda Z = \bigoplus_{k \leq n} (\Lambda Z\ )_k$est appelée filtration de Tate-jozefaik

Definition

Le modèle filtré d'un espace topologique S est le modèle filtré associé à $(A_{PL}(S), d_S)$

Definition

Soit : $\pi : (\Lambda Z, D) \longrightarrow (A, d_A)$ le modèle filtré de (A, d_A)
Le *cocat* (A, d_A) est le plus petit entier n tel qu'il existe un homomorphisme d' adgc r_n

$$\begin{array}{lcl} : (\Lambda Z, D) & \xrightarrow{r_n} & (\Lambda Z_{<n}, D) \\ Id & \searrow & \downarrow i_n \\ & & (\Lambda Z\ , D) \end{array} \qquad i_n \circ r_n \sim Id_{\Lambda Z}$$

La cocatégorie d'une adgc

Example

Si $H^*(A, d_A) = H^{even}$ et $dim\ Z_2 = 0$ d'après $[G - L]$ ceci équivalent à dim $Z_n = 0\ \forall n \geq 2$
donc $cocat\ (A, d_A) = 2$

Remarque:Si (A, d_A) est une adgc formelle alors

$$cocat(A, d_A) = cocat(H^*(A, d_A), 0) = cocat(\Lambda Z, d)$$

Theorem

Soit S un espace topologique pointé 1- connexe de $\mathbb{Q}-$type fini.alors:

$$cocat_0(S) = cocat(A_{PL}(S), d_S)$$

Theorem

Soit S un espace formel les deux propositions suivantes sont équivalentes:
i/ $cocat_0(S) = 2$
ii/ $dim\ Z_n = 0\ \forall n \geq 2$

Dans la proposition précédente l'hypothèse formel est nécessaire
En effet:

Example

Soit l'espace coformel S d'algèbre de LIE d'homothopie définie par:

$$\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{L}(x, y) \big/ \mathbb{L}^{\geq 3}(x, y)$$

avec: $|x| = |y| = 2$
$Cocat_0(S) = Nil(\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}) = 2$
Le modèle minimal de Sullivan est :
$C^*(\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}), 0) = (\Lambda(a, b, c), d)$ avec: $|a| = |b| = 3$ et $|c| = 5$
$da = db = 0$ et $dc = ab$
Son algèbre de cohomologie est: $H^0(S, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $H^3(S, \mathbb{Q}) = a\mathbb{Q} \oplus b\mathbb{Q}$, $H^8(S, \mathbb{Q}) = ac\mathbb{Q} \oplus bc\mathbb{Q}$, $H^{11}(S, \mathbb{Q}) = abc\mathbb{Q}$

Example

Dans le calcul de son modèle bigradué la colonne contient un générateur $t \in Z_1$ tel que $dt = ab$
On a alors deux cocycles ta et tb en colonne 1 d'où la nécessité d' introduire en colonne 2 deux générateurs u et u'
dans Z_2 tel que $du = ta$ et $du' = tb$ donc $\dim Z_2 \neq 0$
S a pour modèle minimal de Quillen:$\mathbb{L}(x, y, z, z', w)$ $|x| = |y| = 2$, $|z| = |z'| = 7$, $|w| = 10$
$\partial x = \partial y = 0$, $\partial z = [x, [x, y]]$, $\partial z' = [y, [x, y]]$, $\partial w = [x, z'] - [y, z]$
∂ n'est pas purement quadratique, donc S n'est pas formel

Défaut de dualité

Soit $f : S \longrightarrow S'$ une application continue telle que $H^*(f) : H^*(S', \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S, \mathbb{Q})$ soit injectif alors l'inégalité: $cocat_0(S) \leq cocat_0(S')$ n'est pas vraie
En effet:

Example

La projection $\pi : S^3 \times S^2 \longrightarrow S^3$ induit une injection en cohomologie alors que $cocat_0(S^3 \times S^2) = 2$ et $cocat_0(S^3) = 1$

Autres énoncés

1/Soit $f : S \longrightarrow S'$ une application continue telle que $H^*(f) : H^*(S', \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S, \mathbb{Q})$ soit injectif, l'énoncé: $cocat_0(S) \geq cocat_0(S')$ n'est pas vraie
En effet:

Example

$$S = S_x^3 \times S_y^3 \times S_z^3 \longrightarrow S' = S_a^6 \vee S_b^6$$

$$[\ \mathbb{Q} \oplus a\ .\mathbb{Q}\ \oplus b.\mathbb{Q} \longrightarrow \Lambda(x, y, z)]$$

$$a \longrightarrow xy$$

$$b \longrightarrow yz$$

$cocat_0(S) = 1$ et $cocat_0(S') = \infty$

2/Soit $f : S \longrightarrow S'$ une application continue telle que $H^*(f) : H^*(S', \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S, \mathbb{Q})$ soit surjectif, l'énoncé: $cocat_0(S) \leq cocat_0(S')$ n'est pas vraie

En effet:

Example

$S = S^3 \vee S^3 \rightarrow S' = S^3 \times S^3$ $cocat_0(S) = \infty$ et $cocat_0(S') = 1$

3/Soit $f : S \rightarrow S'$ une application continue telle que $H^*(f) : H^*(S', \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(S, \mathbb{Q})$ soit surjectif, l'énoncé: $cocat_0(S) \geq cocat_0(S')$ n'est pas vraie
En effet:

Example

$S = S^5 \rightarrow S' = (S^3 \vee S^3) \times S^5_x$ $cocat_0(S) = 1$ et $cocat_0(S') = \infty$