Groupe De Recherche Marocain

Homotopie Rationnelle

http://algtop.net

Projet de recherche 2012-2013

1 Sujet de recherche I: La conjecture de Hilali

Pr. Mohamed Rachid Hilali, Univ. Casablanca, Maroc

1.1 Résumé

M.R. Hilali conjectura en 1990 que la dimension de l'homotopie rationnelle, d'un espace elliptique simplement connexe, ne dépasse pas celle de sa cohomologie rationnelle, i.e.,

$$\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \leqslant \dim H^*(X; \mathbb{Q})$$

Cette conjecture, appelé (H) (par son auteur), a été résolue en 1990 par M.R. Hilali [2] pour les espaces homogènes, ceux purs et pour ceux dits hyperelliptique sous quelques conditions. 18 ans après, en 2008, M.R. Hilali et M.I. Mamouni [3] améliorent ces conditions et établissent la conjecture (H) sous d'autres conditions sur la dimension formelle, sur le rang torique. Ils vérifient la conjecture pour les variétés symplectiques et co-symplectiques

et pour les nilvariétés. En 2008 toujours les deux autres résolvent la conjecture pour les espaces co-formels engendrés uniquement par des éléments de degré impair. Le résultat le plus important reste la résolution de la conjecture pour les espaces formels [4]. Validé scientifiquement par beaucoup de spécialiste l'homotopie rationnelle, cette conjecture a été le centre de recherche en 2011 de Osamu Nakamura et Toshihiro Yamaguchi (Japon) [5] qui ont amélioré les conditions sur la dimension formelle établies par M.R. Hilali et M.I. Mamouni, en innovant aussi avec l'idée de "résoudre" algorithmiquement la conjecture H. En 2012, le groupe de recherche Murillo-Munoz (Espagne) [1] résout la conjecture H pour les espaces hyper-elliptiques sans conditions. Leur innovation principale, est celle de transformer le problème en un autre équivalent, puis d'utiliser la notion de semi-continuité.

Notre objectif est dans une premier temps de résoudre cette conjecture et dans un autre temps étudier les connexions possibles avec la fameuse conjecture du rang torique due a S. Halperin en 1986.

1.2 Références principales

1. Javier Fernandez de Bobadilla, Javier Fersan, Vicente Munoz and Aniceto Murillo, *The Hilali conjecture for hyperelliptic spaces* (preprint 2012)

2. M.R. Hilali, *Action du tore $\mathbb{T}^n$ sur les espaces simplement connexes*, Thèse, Université catholique de Louvain, Belgique, 1990.

3. Mohamed Rachid Hilali et My Ismail Mamouni, *A lower bound of cohomologic dimension for an elliptic space, Topology and its Applications*, Vol. 156, Issue 2 (2008), 274-283.

4. Mohamed Rachid Hilali and My Ismail Mamouni, *A conjectured lower bound for the cohomological dimension of elliptic spaces*, Journal of Homotopy and Related Structures, Vol. 3, No. 1 (2008), 379-384.

5. Nakamura Osamu and Yamaguchi Toshihiro, *Lower bounds of Betti numbers of elliptic spaces with certain formal dimensions*, Kochi J. Math. 6, 9-28 (2011)

1.3 Références complémentaires

FxH82 Y. F´elix and S. Halperin, Formal spaces with finite dimensional rational homotopy, Transactions of the American Mathematical Society 270 (1982), 575-588.

FH82 Y. Felix and S. Halperin, Rational LS category and its applications, Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), no. 1, 1-38.

FHT01 Y. F´elix, S. Halperin and J-C Thomas, Rational homotopy theory, Graduate Texts in Math, Vol. 205, Springer-Verlag, New York, 2001.

FH79 J. Friedlander, S. Halperin, An arithmetic characterization of the rational homotopy groups of certain spaces, Invent. Math. 53 (1979) 117–133.

GJ03 S. Ghorbal and B. Jessup, Estimating the rational LS-category of elliptic spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), 223-233.

H83 S. Halperin, Finitness in the minimal models of Sullivan, Trans. Amer. Math. Soc. 230 (1983) 173–199.

JL04 B. Jessup and G. Lupton, Free torus actions and two-stage spaces, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge University Press Vol. 137 (2004), 191-207, arXiv: math/0309434.

Lu02 G. Lupton, The Rational Toomer Invariant and Certain Elliptic Spaces, Contemporary Mathematics Vol. 316 (2002), 135-146, arXiv:math/0309392v1.

S78 D.S. Sullivan, Infinitesimal computations of topology, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 47 (1978) 269–331.

2 Sujet de Recherche II: LS-Category et ses ramifications

Pr. Youssef Rami, Univ. Meknes, Maroc

2.1 Résumé

Le projet de recherche de notre groupe est situé dans le cadre de la détermination, sinon l'estimation, de l'invariant homotopique rationnel $cat_0(X)$ d'un espace simplement connexe. Celui-ci est une variante de l'invariant homotopique $cat(X)$ introduit depuis 1934 par L. Lusternik et L. Schnirelmann à travers leur étude sur les problèmes variationnels [LS34] Il est introduit par Y. Félix et S. Halperin en 1982 [FH82] comme première utilisation concrète des modèles de D. Sullivan (1978) [Sul78] . Ceux-ci assurent un pont entre les problèmes à caractère topologique ou géométrique et l'étude des algèbres

différentielles graduées commutatives. Un autre pont (dual) est construit auparavant par D. Quillen (1969) vers les algèbres de Lie graduées [FHT01] .
L'étude de l'invariant en question a permis entre autre la dichotomie elliptique-hyperbolique des espaces rationnels simplement connexes [FHT01] . Ces derniers sont caractérisés par les deux conditions suivantes: $dim(H^*(X,\mathbb{Q}) < \infty$ et $dim(\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q}) < \infty$. Ils sont de catégorie finie et leur cohomologie est une algèbre à dualité de Poincaré et se situent par suite dans la catégorie des algèbres de Gorenstien [FHT88] . Très récemment Y. Félix, S. Halperin et J. M. Lemaire ont montré [FHL98] que pour de tels espaces: $cat_0(X) = e_0(X)$ où $e_0(X)$ désigne l'invariant rationnel de Toomer de X [FH82] . Cette égalité est utilisée par L. Luchuga et A. Murillo [LM02] d'une part et par G. Lupton [Lup02] d'autre part pour donner une expression explicite de $cat_0(X)$ sous une condition liée à la longueur minimale des mots dans l'expression des différentielles $d(v_i)$ du modèle de Sullivan $(\Lambda(v_1, \ldots, v_n), d)$ de X. Cette condition est aussi nécessaire lorsque celui-ci est quadratique.
Notre but principal est d'étudier les cas en dehors de la condition restrictive précédente. D'autre part on cherche à utiliser les outils élaborés - notamment certaines suites spectrales - pour étudier les espaces de configurations des variétés différentiables et éventuellement pour faire le lien avec la conjecture H (sujet du premier projet du recherche du GDR homotopie Rationnelle), posé par Pr. R. Hilali.

2.2 Références

- LS34, L. Lusternik and L. Schnirelmann, Méthodes Topologiques dans les Problémes Variationnels, Hermann, Paris, (**1934**)
- FHT01,Y. Félix and S Halperin and J. C. Thomas, Rational Homotopy Theory, G. T. M., Vol.**205**, Springer-Verlag, New York, (2001),
- Pal66, R. S. Palais, Lusternik-Schnirelmann theory on Banach Manifolds, Topology, volume 5, **(1966)**, 115-132,
- Lup02,G. Lupton, The Rational Toomer Invariant and Certain Elliptic Spaces,Lusternik-Schnirelmann category and Related Topics (Mt, Holyoke, 2001), Cont. Math. AMS, volume **316**, (2002), 135-146,
- Jam78, I. M. James, On category in the sens of Lusternik-Schnirelmann , Topology, volume 17, **(1978)**, 331-348
- FH82, Y. Félix and S. Halperin, Rational LS category and its Applications, Tran. Amer. Math. Soc., Vol.273, **(1982)**, 1-38

- LM02, L. Luchuga and A. Murillo, A Formula for the Rational LS-category of Certain Spaces, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, volume 52, No 5, **(2002)**, (1585-1590)

- FHL98, Y. Félix and S. Halperin and J. M. Lemaire, The Rational LS-category of Products and Poincaré Duality Camplexes, Topology, Vol.37, No. 4, 1998, 749-756,

- Mur94, A. Murillo, The evaluation map of some Gorenstein Spaces, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol.91, 1994, 209-218

- FHT83, Y. Félix and S Halperin and J. C. Thomas, THe Homology LieAalgebra for finite complexes , Publ. I.H.E.S., Vol.56, 1983, 89-96,

- FHT88, Y. Félix and S Halperin and J. C. Thomas, Gorenstein Spaces, Advenced in Math., Vol.71, 1988, 92-112,

- Sul78, D. Sullivan, Infinitisimal Computations in topology, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 1978, 269-331,

- Ram99, Y. Rami, Dimension Globale et Classe Fondamentale d'un Espace, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, Vol.49, I, 1999, 333-350,

- Hal77, S. Halperin, Finiteness in the Minimal Models of Sullivan , Trans. Amer. Math. Soc., Vol.230, 1977, 173-199,

- Mur93, A. Murillo, On the evaluation map, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.339, 1993, 611-522,

- HL88, S. Halperin and J. M. Lemaire, Notion of category in Differential alebra,Algebraic Topology-Rational Homotopy, Lecture Notes in Mathematics, Vol.1318, 1988, 138-154,

3 Projet de recherche III: Topological Robotics

Dr. My Ismail Mamouni, CRMEF, Rabat.

3.1 Résumé

$TC(X)$ is a number which measures discontinuity of the process of motion planning in the configuration space X . More precisely, $TC(X)$ is the minimal number k such that there are k different "motion planning rules" each defined on an open subset of $X \times X$, so that each rule is continuous in the source and target configurations. This homotopic invariant was introduced first by M. Farber in [Far-03]. the main important thing that catch our attention is the resemblance, under various angles, between the two concepts $TC(X)$ and $cat(X)$.

Many rational homotopy theorists was interested in rational TC (see [LM-07], [LM-00], [JMP-12]). The main problem with rational TC is that, unlike with rational category, we do not know if it equals MTC, which is its counterpart invariant defined in terms of retracts of differential graded modules. This means that a lot of the theorems about rational category (such as the product formula, including Ganea's conjecture, and the result that cat=Toomer invariant for a closed manifold) do not translate easily to results about rational TC.

In first time, we plan to compute the TC of some kind spaces (or family of spaces). To compute the standard upper bound (coming from dimension and connectivity, via obstruction theory) and the standard lower bound (given by the zero-divisors cup-length in cohomology). We need also to look for some improved bounds (upper or lower). Most of the current research on the topic is thus motivated by trying to compute the TC of some concrete space or family of spaces.

In a highest level, we can look what about M. Grant conjecture, which predict that $TC(X) \leq 2\dim(X)$, for any closed manifold with zero Euler characteristic. Recall that (see [Far-03]), $TC(X) \leq 2\dim(X) + 1$ for any paracompact space, and that the upper bound of TC proposed by M. Grant is the general upper bound can be decreased by one.

This may also be many hard problems (see [MFO-10]), a positive solution would imply that TC(Klein bottle)=4, for instance) but it has the advantage of being geometric and leading the student to think about specific examples. (or counter-examples!)

References

[Far-03] M. Farber, Topological complexity of motion planning, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), 211–221.

[Far-04] M. Farber, Instabilities of robot motion, Topology and its Appl. **140** (2004), 245–266.

[Far-06] M. Farber, Topology of robot motion planning, Morse Theoretic Methods in Nonlinear Analysis and in Symplectic Topology (P. Biran et al (eds.)) (2006), 185–230.

[JMP-12] B. Jessup, A. Murillo and P.-E. Parent, Rational Topological Complexity, accepted in April 2012, Algebraic & Geometric Topology, **12** (2012) 1793–1805.

[Lat-90] J. C. Latombe, Robot Motion Planning, Kluwer Academic Publishers (1990).

[LM-07] L. Lechuga and A. Murillo, Topological complexity of formal spaces, Topology and Robotics, Contemp. Math., **438** (2007), 105–114.

[LM-00] L. Lechuga and A. Murillo Complexity in rational homotopy, Topology **39** (2000), no. 1, 89-95.

[MFO-10] Oberwolfach report from the Arbeitsgemeinschaft on Topological Robotics, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany, (2010).

[Sch-66] A. S. Schwarz, The genus of a fiber space, Amer. Math. Soc. Transl.(2) **55** (1966), 49–140.