# Complexité Topologique

Lucile Vandembroucq

Centro de Matemática - Universidade do Minho - Portugal

3ème GeTo$\varphi$Ma

CRMEF-Rabat 6-8 Juin 2013

# Motivation

**Motivation-** Problème de la planification des mouvements d'un système mécanique en robotique.

**Espace de configuration du système-** Espace topologique $X$ de tous les états possibles du système.

**Plan de mouvements pour le système-** section $s : X \times X \to X^I$ de l'application d'évaluation des chemins:

$$\begin{array}{rcl} \pi = ev_{0,1} : X^I & \to & X \times X \\ \gamma & \mapsto & (\gamma(0), \gamma(1)) \end{array} \qquad \pi \circ s = id$$

# Motivation

- Si $X$ est connexe par arcs, $\pi : X^I \to X \times X$ admet une section mais celle-ci n'est, en général, pas continue (moralement: donnée par une unique formule).
- $\pi : X^I \to X \times X$ admet une section **continue** ssi $X$ est contractile.
- $X$ est contractile s'il existe un point $a \in X$ et une homotopie $H : X \times I \to X$ tels que $H(x, 0) = x$ et $H(x, 1) = a$.
- En général, on aura besoin de plusieurs formules pour décrire un plan de mouvements.

# Première définition

**Definition.** (M. Farber) (Complexité Topologique, 1ère version)
Soit $X$ un espace topologique. On désigne par $\mathrm{TC}_1(X)$ le plus petit entier $n$ tel que

$$X \times X = F_1 \cup \ldots \cup F_n$$

où

- pour $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \emptyset$,
- $F_i \subset X \times X$ est ENR (Euclidian Neighborhood Retract),
- sur chaque $F_i$ il existe une section locale continue de $\pi$, i.e, une application continue $s_i : F_i \to X^I$ telle que $\pi s_i$ est $F_i \hookrightarrow X \times X$.

S'il n'existe pas de tel entier, on pose $\mathrm{TC}_1(X) = \infty$.

# ENR

Un espace topologique $X$ est ENR s'il est homéomorphe à un sous-espace $Y \subset \mathbb{R}^n$ qui est rétracte d'un ouvert, i.e, pour lequel il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et une application $r : U \to Y$ tels que

$$Y \subset U \quad \text{et} \quad r_{|Y} = id.$$

- Toute variété compacte (avec ou sans bord) est ENR.
- Tout CW-complexe fini est ENR.

Si $F \subset Z$ sont tous deux ENR, alors il existe un voisinage ouvert $V$ de $F$ dans $Z$ et une rétraction $r : V \to F$ tels que les applications

$$V \xrightarrow{r} F \hookrightarrow Z \qquad V \hookrightarrow Z$$

sont homotopes.

# Catégorie sectionnelle

**Definition.** (A. Schwarz - secat d'une fibration - Version normalisée) La catégorie sectionnelle $\mathrm{secat}(p)$ d'une fibration $p : E \to B$ est le plus petit entier $n$ (ou $\infty$) tel que $B$ peut être recouvert par $n+1$ ouverts sur chacun desquels $p$ admet une section locale continue.

- Une fibration $p : E \to B$ est une application continue qui relève les homotopies. Si $B$ est connexe par arcs, $p$ est surjective et toutes les fibres ont le même type d'homotopie.
- L'application $\pi : X^I \to X \times X$ est une fibration. Si $X$ est pointé (point de base $*$) et connexe par arcs, toutes les fibres ont le type d'homotopie de l'espace de lacets

$$\Omega X = \{\gamma \in X^I \,|\gamma(0) = \gamma(1) = *\}$$

# Catégorie de Lusternik et Schnirelmann

**Definition.** (cat - Version normalisée) La catégorie $\mathrm{cat}(X)$ d'un espace $X$ est le plus petit entier $n$ (ou $\infty$) tel que $X$ peut être recouvert par $n+1$ ouverts contractiles dans $X$.

**Exemples.** $\mathrm{cat}(S^n) = 1$; $\mathrm{cat}(X) = 0$ ssi $X$ est contractile.

**Théorème** (L. Lusternik, L. Schnirelmann). Soit $M$ une variété différentielle. Toute fonction différentielle $f : M \to \mathbb{R}$ admet au moins $\mathrm{cat} M + 1$ points critiques.

secat est une généralisation de cat puisque, pour $X$ pointé et connexe par arcs,

$$\mathrm{cat}(X) = \mathrm{secat}(ev_1 : PX \to X)$$

où $PX = \{\gamma \in X^I \,|\gamma(0) = *\}$.

# Définition définitive

**Théorème** (M. Farber [F2],[F3]). Si $X$ est une variété $C^\infty$ (ou, plus généralement, un polyèdre) alors

$$\mathrm{TC}_1(X) = \mathrm{secat}(\pi : X^I \to X \times X) + 1.$$

Dorénavant nous considérerons la définition suivante de la compléxité topologique:

**Definition.** (M. Farber) (Complexité Topologique, Version normalisée) La complexité topologique d'un espace $X$ est

$$\mathrm{TC}(X) := \mathrm{secat}(\pi : X^I \to X \times X).$$

Ainsi:

- $\mathrm{TC}(X) = 0$ ssi $X$ est contractile
- $\mathrm{TC}(S^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ impair} \\ 1 \text{ ou } 2 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

# Section vs. section homotopique

Dorénavant toutes les applications considérées sont continues.

**Proposition.** Soit $p : E \to B$ une fibration et soit $j : U \hookrightarrow B$ l'inclusion d'un ouvert. S'il existe $s : U \to E$ telle que $p \circ s \simeq j$ alors il existe $\tilde{s} : U \to E$ telle que $p \circ \tilde{s} = j$.

**Remarque.** Ainsi pour une fibration, on a

"section (locale) homotopique $\Leftrightarrow$ section (locale) stricte"

Pour une application quelconque $f : Y \to X$ de fibration associée $\hat{f} : \hat{Y} \to X$, on a

"$f$ a une section homotopique $\Leftrightarrow \hat{f}$ a une section stricte"

# Premières propriétés

**Proposition.** Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ deux fibrations. S'il existe $f : E' \to E$ telle que $pf \simeq p'$

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p'"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

alors $\mathrm{secat}(p') \geq \mathrm{secat}(p)$.

**Conséquence.** Si $X$ est connexe par arcs, $\mathrm{TC}(X) \leq \mathrm{cat}(X \times X)$.

# Premières propriétés

Plus généralement:

**Proposition.** Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ deux fibrations. S'il existe $f : E' \to E$, $\bar{f} : B' \to B$ et $\bar{g} : B \to B'$ telles que $pf \simeq \bar{f}p'$ et $\bar{f}\bar{g} \simeq id$

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "p'"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "\bar{g}"'] & B' \arrow[r, "\bar{f}"'] & B \end{tikzcd}$$

alors $\mathrm{secat}(p') \geq \mathrm{secat}(p)$.

# Premières propriétés

**Corollaire.** (Invariance homotopique) Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ deux fibrations. S'il existe $f : E' \to E$, $\bar{f} : B' \to B$ deux équivalences d'homotopie telles que $pf \simeq \bar{f}p'$

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "\sim", "\bar{f}"'] & B \end{tikzcd}$$

alors $\mathrm{secat}(p) = \mathrm{secat}(p')$.

**Conséquence.** $\mathrm{cat}$ et $\mathrm{TC}$ sont des invariants homotopiques.

# Premières propriétés

**Proposition.** ($\mathrm{secat}$ et produit fibré) Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ deux fibrations. S'il existe un produit fibré (commutatif) de la forme

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "\bar{f}"'] & B \end{tikzcd}$$

alors $\mathrm{secat}(p') \leq \mathrm{secat}(p)$.

**Conséquence.** Si $X$ est connexe par arcs

- $\mathrm{cat}(X) \leq \mathrm{TC}(X)$
- (Farber) Si $X = G$ est un groupe topologique, $\mathrm{TC}(G) = \mathrm{cat}(G)$.

# Une borne supérieure par la dimension

Si $X$ est un CW complexe de dimension finie alors $\mathrm{cat}(X) \leq \dim(X)$ et ceci peut être amélioré en considérant la connexité de $X$.

**Proposition. [CLOT],[F2], [S]** Soit $X$ un CW complexe de dimension finie et $q$-connexe ($\pi_i(X) = 0$, $i \leq q$). On a

- $\mathrm{cat}(X) < \dfrac{\dim(X) + 1}{q + 1}$
- $\mathrm{TC}(X) < \dfrac{2\dim(X) + 1}{q + 1}$

En particulier, si $X$ est simplement connexe, $\mathrm{cat}(X) < \dfrac{\dim(X) + 1}{2}$ et $\mathrm{TC}(X) \leq \dim(X)$.

# Une borne inférieure par la cohomologie

Nous allons considérer la cohomologie à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$:

$$H^*(X) = H^*(X; \mathbb{K})$$

Munie du cup-produit

$$\cup : H^*(X) \otimes H^*(X) \to H^*(X)$$

$H^*(X)$ est une algèbre graduée commutative et la cohomologie réduite

$$\widetilde{H}^*(X) := \ker(\varepsilon : H^*(X) \to \mathbb{K})$$

(où $\epsilon$ est induit par l'inclusion du point de base) est un idéal.

Pour la catégorie nous avons

$$\mathit{cuplength}(X) := \mathrm{nil}\,\widetilde{H}^*(X) \leq \mathrm{cat}(X)$$

# Une borne inférieure par la cohomologie

**Théorème.** (A. Schwarz [S]) Pour une fibration $p : E \to B$ on a

$$\mathrm{nil}(\ker p^*) \leq \mathrm{secat}\, p$$

où $p^* : H^*(B) \to H^*(E)$ est le morphisme induit par $p$.
Pour $p = \pi : X^I \to X \times X$ on a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & X^I \arrow[dl, "\pi"] \\ & X \times X & \end{tikzcd}$$

où $\Delta : X \times X \times X$ est la diagonale, $\Delta(x) = (x, x)$.
Par conséquent, $\pi^* = \Delta^*$.

# Une borne inférieure par la cohomologie

Par ailleurs, par le Théorème de Künneth,

$$H * (X \times X) \cong H^*(X) \otimes H^*(X)$$

et le morphisme

$$H^*(X) \otimes H^*(X) \cong H^*(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(X)$$

est le cup-produit. Ainsi

$$\mathrm{nil}(\ker \pi^*) = \mathrm{nil}(\ker \Delta^*) = \mathrm{nil}(\ker \cup)$$

**Théorème.** (Farber [F1]) $\mathrm{TC}(X) \geq \mathrm{nil} \ker \cup_X$.

# Étude d'exemples

**1-** (M. Farber) $\mathrm{TC}(S^n) = \mathrm{nil}\,\ker \cup = \begin{cases} 1 & n \text{ impair} \\ 2 & n \text{ pair} \end{cases}$

**2-** Si $X = S^{n_1} \vee \cdots S^{n_k}$ avec $k \geq 2$

$$\mathrm{nil}\,\ker \cup = 2\mathrm{cat}(X) = 2 \qquad \mathrm{TC}(X) = 2$$

**3-** (M. Farber) $X = \Sigma_g$ surface orientable de genre $g$

$$\mathrm{TC} = \text{...Exercice!!}$$

**4-** (M. Farber/ M. Farber, S. Tabachnikov, S. Yuzvinsky)

$$\mathrm{nil}\,\ker \cup = \dim(\mathbb{CP}^n) = 2n \qquad \mathrm{TC}(\mathbb{CP}^n) = 2n$$

Plus généralement, si $M$ est une variété symplectique fermée et simplement connexe de dimension $2n$, on a

$$\mathrm{TC}(M) = \mathrm{nil}\,\ker \cup_M = 2n.$$

# Étude d'exemples

**5-** (M. Farber, S. Tabachnikov, S. Yuzvinsky) $X = \mathbb{RP}^n$

- $n \leq \mathrm{TC}(\mathbb{RP}^n) \leq 2n$
- pour $2^r \leq n \leq 2^{r+1} - 1$ on a $\mathrm{nil}\,\mathrm{ker} \cup_{\mathbb{RP}^n} = 2^{r+1} - 1$
- si $n = 2^r$ alors $\mathrm{nil}\,\mathrm{ker} \cup_{\mathbb{RP}^n} = 2n - 1$ et $\mathrm{TC}(\mathbb{RP}^n) = 2n - 1$ ou $2n$.
- si $n = 1, 3$ ou 7, alors $\mathrm{TC}(\mathbb{RP}^n) = \mathrm{cat}(\mathbb{RP}^n) = n$

**Théorème** [FYT] Pour $n \neq 1, 3, 7$, $\mathrm{TC}(\mathbb{RP}^n)$ est le plus petit entier $k$ tel qu'il existe une immersion de $\mathbb{RP}^n$ dans $\mathbb{R}^k$. En particulier:

- $\mathrm{TC}(\mathbb{RP}^n) = n$ ssi $n = 1, 3$ ou 7
- $\mathrm{TC}(\mathbb{RP}^n) \leq 2n - 1$
- Si $n = 2^r$, $\mathrm{TC}(\mathbb{RP}^n) = 2n - 1$
- Si $n < m$, $\mathrm{TC}(\mathbb{RP}^n) \leq \mathrm{TC}(\mathbb{RP}^m)$.

# Categorie sectionnelle et Joints

Le joint fibré (au dessus de $B$) de deux fibrations $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ est l'application

$$\begin{array}{rcl} E *_B E' := E \amalg (E \times_B E' \times [0,1]) \amalg E' / \sim & \to & B \\ \langle e, e', t \rangle & \mapsto & p(e) = p'(e') \end{array}$$

où $\sim$ est donnée par $(e, e', t) \sim \begin{cases} e & t = 0 \\ e' & t = 1 \end{cases}$

Cette application est une fibration dont la fibre est le joint usuel des fibres $F$ et $F'$ de $p$ et $p'$:

$$F * F' = F \amalg F \times F' \times [0,1] \amalg F' / \sim$$

Pour $p : E \to B$, posons

$$j^0(p) = p \quad \text{et, pour } n \geq 1, \quad j^n(p) : *_B^n E = \underbrace{E *_B \cdots *_B E}_{n+1 \text{ facteurs}} \to B$$

**Théorème.** (A. Schwarz [S]) Si $B$ est normal alors

$$\mathrm{secat}(p) \leq n \iff j^n(p) \text{ admet une section continue.}$$

**Corollaire.** Si $X$ est normal, alors

$$\mathrm{TC}(X) \leq n \iff j^n(\pi) : *_{X \times X}^n X^I \to X \times X \text{ admet une section.}$$

**Rem.** Dans le cas $p = ev_1 : PX \to X$ on retrouve une construction des fibrations de Ganea $G_n(X) \to X$ qui caractérisent la catégorie.

# Categorie sectionnelle et Fatwedge

Dans le cas de la catégorie, on a une caractérisation par le fatwedge:

$$T^n(X) := \{(x_0, ..., x_n) \in X^{n+1} \mid \exists i,\ x_i = *\}$$

Caractérisation de Whitehead: si $X$ est normal, connexe par arcs et bien pointé alors

$\mathrm{cat}(X) \leq n$ ssi la $(n+1)$ diagonale relève, à homotopie près, dans le fatwedge:

$$\begin{tikzcd} & T^n(X) \arrow[d, hook, "j"] \\ X \arrow[ur, dotted, "\lambda"] \arrow[r, "\Delta_{n+1}"'] & X^{n+1} \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{cat}(X) \leq n \Leftrightarrow \exists \lambda \text{ t.q. } j \circ \lambda \simeq \Delta_{n+1}$$

# Categorie sectionnelle et Fatwedge

Soit $p : E \to B$ une fibration (de base normale) et soit $\alpha : A \to B$ une cofibration telle qu'il existe un diagramme homotopiquement commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\alpha"'] & E \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd} \quad \text{ou, de manière equivalente,} \quad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "p"] & A \arrow[dl, "\alpha"] \\ B & \end{tikzcd}$$

On définit:

$$T^n(\alpha) := \{(x_0, ..., x_n) \in B^{n+1} \mid \exists i,\ x_i \in \alpha(A)\}$$

**Théorème** (Fassó-Velenik [FV])

$$\mathrm{secat}(p) \leq n \Leftrightarrow \exists \lambda \text{ s.t. } j \circ \lambda \simeq \Delta_{n+1} \qquad \begin{tikzcd} & T^n(\alpha) \arrow[d, hook, "j"] \\ B \arrow[ur, dotted, "\lambda"] \arrow[r, "\Delta_{n+1}"'] & B^{n+1} \end{tikzcd}$$

**Remarque** (lien entre les deux caractérisations)

Il peut être établi, en utilisant le Théorème du Joint de J. P. Doeraene [D], que, donnée une fibration $p : E \to B$ il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} *^n_B E \arrow[r] \arrow[d, two heads, "j^n(p)"'] & E' \arrow[d, two heads] & T^n(\alpha) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[dl, hook', "j"] \\ B \arrow[r, "\Delta_{n+1}"'] & B^{n+1} & \end{tikzcd}$$

dans lequel $\alpha$ est une cofibration équivalente à $p$ et le carré de gauche est un produit fibré.

Ainsi $j^n(p)$ admet une section homotopique ssi $\Delta_{n+1}$ relève (à homotopie près) dans $T^n(\alpha)$.

# Categorie sectionnelle et Fatwedge

Dans le cas de $\mathrm{TC}$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\Delta"'] & X^I \arrow[d, "\pi"] \\ & X \times X \end{tikzcd}$$

et, si $X$ est un CW-complexe, $\Delta$ est une cofibration. On a donc:

$$\mathrm{TC}(X) \leq n \Leftrightarrow \exists \lambda \text{ s.t. } j \circ \lambda \simeq \Delta_{n+1}$$

$$\begin{tikzcd} & T^n(\Delta) \arrow[d, hook, "j"] \\ X \times X \arrow[ur, dotted, "\lambda"] \arrow[r, "\Delta_{n+1}"'] & (X \times X)^{n+1} \end{tikzcd}$$

# Application des caractérisations

En applicant des foncteurs aux caractérisations, on obtient des bornes inférieures de $\mathrm{secat}$. Ainsi, en appliquant le foncteur cohomologie,

- la traduction de la caractérisation par le joint donne un nouvel invariant:

  $$\mathrm{Hsecat}(p) \leq n :\Leftrightarrow H^*(j^n(p)) \text{ est injective.}$$

  Dans le cas de la LScat cet invariant est appelé Invariant de Toomer et est noté $e_{\mathbb{K}}(X)$. Dans le cas de $\mathrm{TC}$ on utilisera la notation $\mathrm{HTC}$.

- si $p$ admet une rétraction homotopique, la traduction de la caractérisation par le fatwedge correspond à $\mathrm{nil}\ker p^*$ et le lien entre les caractérisations permet de dire immédiatement

  $$\mathrm{nil}\ker p^* \leq \mathrm{Hsecat}(p) \leq \mathrm{secat}(p).$$

Ainsi: $\begin{cases} cuplength(X) \leq e_{\mathbb{K}}(X) \leq \mathrm{cat}(X) \\ \\ \mathrm{nil}\ker \cup_X \leq \mathrm{HTC}(X) \leq \mathrm{TC}(X) \end{cases}$

**2 Références générales:**

- Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, Rational Homotopy Theory [FHT]
- Y. Félix, J. Oprea, D. Tanré, Algebraic Models in Geometry [FOT]

Dorénavant $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

On considère le foncteur (contravariant) de Sullivan des formes polynomiales:

$$A_{PL} : TOP \to AGDC \text{ (algébres graduées diff. comm.)}$$

- Si $X$ est simplement connexe et de type fini ($\forall i, \dim H^*(X;\mathbb{Q}) < \infty$) alors $A_{PL}(X)$ contient toute l'information sur le type d'homotopie rationnelle de $X$.
- En particulier, $H(A_{PL}(X)) = H^*(X;\mathbb{Q})$.

# Modèles dans AGDC

Une agdc est une algèbre graduée $A = \{A^n\}_{n\geq 0}$ munie d'une différentielle

$$d : A^n \to A^{n+1} \qquad d^2 = 0 \qquad d(a\cdot b) = da\cdot b + (-1)^{|a|} a\cdot db$$

et dont le produit est commutatif: $a\cdot b = (-1)^{|a||b|} b\cdot a$.

Un modèle dans AGDC d'un espace $X$ est la donnée d'une agdc $(A, d)$ faiblement équivalente à $A_{PL}(X)$:

$$(A, d) \xrightarrow{\sim} \bullet \xleftarrow{\sim} \quad \xrightarrow{\sim} \cdots \xleftarrow{\sim} A_{PL}(X)$$

Ici chaque flèche est un quasi-isomorphisme, i.e. un morphisme (dans AGDC) qui induit un isomorphisme en cohomologie.

Si $(A, d)$ et $(B, d)$ sont des modèles de $X$ et $Y$ alors

$$(A, d)\otimes(B, d) = (A\otimes B, d) \quad d(a\otimes b) = da\otimes b + (-1)^{|a|} a\otimes db$$

est un modèle de $X \times Y$.

# Modèles de Sullivan

Tout espace $X$ simplement connexe et de type fini admet un modèle de Sullivan minimal, c'est-à-dire un modèle dans AGDC $(A, d)$ où

- $A$ est une algèbre commutative libre sur un espace vectoriel gradué

$$A = \Lambda V = \text{Symétrique}(V^{\text{pair}}) \otimes \text{Exterieure}(V^{\text{impair}})$$

- $d(V) \subset \Lambda^{\geq 2}(V)$ (condition de minimalité)

Pour un tel modèle il existe un quasi-isomorphisme:

$$(\Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} A_{PL}(X)$$

et un isomorphisme linéaire

$$V \cong \text{ dual of } \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Le modèle minimal de $X$ est unique à isomorphisme près.

# Exemples de modèles

- Sphère de dimension impaire: $S^{2n+1}$, $n \geq 0$

$$\Lambda(x) \text{ où } |x| = deg(x) = 2n+1,\ dx = 0$$

- Sphère de dimension paire: $S^{2n}$, $n \geq 1$

$$\Lambda(x,y) \text{ où } |x| = 2n,\ dx = 0,\ |y| = 4n-1,\ dy = x^2$$

- $\mathbb{CP}^n$, $n \geq 1$

$$\Lambda(x,y) \text{ où } |x| = 2,\ dx = 0,\ |y| = 2n+1,\ dy = x^{n+1}$$

**Remarque:** $(\Lambda x/x^2, 0)$ et $(\Lambda x/x^{n+1}, 0)$ sont aussi des modèles de $S^n$ et $\mathbb{CP}^n$ mais ce ne sont pas des modèles de Sullivan.

# Formalité

$X$ est **formel** si $(H^*(X), 0)$ est un modèle de $X$ dans AGDC.

- Les sphères, $\mathbb{CP}^n$ sont des espaces formels.
- Un espace contractile est un espace formel (de modèle $(\mathbb{Q}, 0)$).
- Les espaces de lacets sont formels: Si $X$ admet $(\Lambda V, d)$ comme modèle minimal alors un modèle de $\Omega X$ est

$$(\Lambda sV, 0) \quad \text{où} \quad (sV)^n = V^{n+1}.$$

- L'espace $X$ dont le modèle minimal est

$$\Lambda(a, b, u) \text{ où } |a| = |b| = 3,\ da = db = 0,\ |u| = 5,\ du = ab$$

n'est pas formel.

# Modèles d'applications

Un modèle dans AGDC d'une application $f : Y \to X$ est la donnée d'un morphisme $\varphi : (A, d) \to (B, d)$ faiblement équivalent à $A_{PL(f)}$:

$$\begin{tikzcd}
(A,d) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\varphi"'] & \bullet \arrow[d] & {} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \cdots & A_{PL}(X) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "A_{PL}(f)"] \\
(B,d) \arrow[r, "\sim"] & \bullet & {} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & \cdots & A_{PL}(Y) \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Si $(A, d)$ est un modèle de $X$ (avec $A^0 = \mathbb{Q}$) alors:

- l'augmentation $\varepsilon : (A, d) \to (\mathbb{Q}, 0)$ est un modèle (surjectif) de $ev_1 : PX \to X$ (et de $* \hookrightarrow X$.)
- La multiplication $\mu : (A, d) \otimes (A, d) \to (A, d)$ est un modèle (surjectif) de $\pi : X^I \to X \times X$ (et de $\Delta : X \to X \times X$.)

# Modèles relatifs de Sullivan (KS extension)

Soit $\varphi : (A, d) \to (B, d)$ un morphisme dans AGDC, modèle d'une application $f : Y \to X$. Un modèle minimal relatif de $\varphi$ (ou de $f$) dans AGDC est une extension $i : a \mapsto a \otimes 1$

$$\begin{tikzcd}
(A, d) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "i"'] & (B, d) \\
& (A \otimes \Lambda V, d) \arrow[u, "\psi", "\sim"']
\end{tikzcd}$$

où $d(V) \subset (A^+ \otimes \Lambda V) \oplus \Lambda^{\geq 2} V$ et $\psi$ est un quasi-iso.

Si $f : Y \to X$ est une fibration de fibre $F$ alors l'agdc

$$(\Lambda V, \bar{d})$$

où $\bar{d}$ est la différentielle induite, est un modèle de $F$.

# Modèles de la fibration $\pi : X^I \to X \times X$

Soit $(\wedge V, d)$ un modèle minimal de $X$. La multiplication

$$\mu : (\wedge V, d) \otimes (\wedge V, d) \to (\wedge V, d)$$

est un modèle surjectif de $\pi$.

Si $V'$ est une autre copie de $V$, on peut décrire $\mu$ comme suit:

$$\mu : (\wedge(V \oplus V'), d) \to (\wedge V, d), \qquad \mu(v) = \mu(v') = v$$

Un modèle minimal relatif est donné par:

$$(\wedge(V \oplus V'), d) \rightarrowtail (\wedge(V \oplus V') \otimes \wedge sV, d)$$

$$dsv = v' - v - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\zeta d)^i}{i!}(v)$$

où $\zeta$ est la dérivation donnée par $\zeta(v) = \zeta(v') = sv$ et $\zeta(sv) = 0$.

# Rétractions homotopiques dans AGDC

Soit $\varphi : (A, d) \to (B, d)$ un morphisme dans AGDC et soit

$$\begin{tikzcd} (A,d) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "i"'] & (B,d) \\ & (A \otimes \Lambda V, d) \arrow[u, "\psi", "\sim"'] \end{tikzcd}$$

un modèle minimal relatif de $\varphi$. Le morphisme $\varphi$ admet une rétraction homotopique dans AGDC s'il existe un morphisme

$$\tau : (A \otimes \Lambda V, d) \to (A, d)$$

dans *AGDC* tel que $\tau \circ i = id$.

# Oubli de structure: modèles en modules

Soit $(A, d)$ une agdc.

Un $(A, d)$**-module** est un e.v.g $M = \{M^n\}_{n\geq 0}$ muni d'une action graduée de $A$

$$A \otimes M \to M \qquad |a \cdot m| = |a| + |m|$$

et d'une différentielle

$$d : M^n \to M^{n+1} \qquad d^2 = 0 \qquad d(a \cdot m) = da \cdot m + (-1)^{|a|} a \cdot dm.$$

Les morphismes sont les applications $A$-linéaires (de degré 0) qui commutent à la différentielle.

Un morphisme dans AGDC $\varphi : (A, d) \to (B, d)$ munit $(B, d)$ d'une structure de $(A, d)$-module et est automatiquement un morphisme de $(A, d)$-modules.

# Oubli de structure: modèles en modules

Soit $\varphi : (A, d) \to (B, d)$ un morphisme dans AGDC, modèle d'une application $f : Y \to X$. Un **modèle semi-libre minimal** de $\varphi$ (ou de $f$) dans la catégorie des $(A, d)$-modules est une extension $i : a \mapsto a \otimes 1$

$$\begin{tikzcd} (A,d) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "i"'] & (B,d) \\ & (A \otimes (\mathbb{Q} \oplus X), d) \arrow[u, "\psi", "\sim"'] \end{tikzcd}$$

où

- $A \otimes (\mathbb{Q} \oplus X)$ est un $A$-module libre,
- $d$ est de $(A, d)$-modules et $X = X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots$ t.q. $d(X_0) \subset A \otimes \mathbb{Q}$ et, pour $i \geq 1$, $d(X_i) \subset A \otimes (\mathbb{Q} \oplus X_0 \oplus \cdot \oplus X_{i-1})$
- $\psi$ est un quasi-iso de $(A, d)$ modules
- la différentielle $\bar{d}$ induite sur $X$ est nulle (condition de minimalité)

**Rem.** L'espace vectoriel gradué $\mathbb{Q} \oplus X$ est alors isomorphe à $H^*(X)$ (en oubliant la structure d'algèbre).

# Rétractions homotopiques dans les $(A, d)$-modules

Soit $\varphi : (A, d) \to (B, d)$ un morphisme dans AGDC et soit

$$\begin{tikzcd}
(A,d) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "i"'] & (B,d) \\
& (A \otimes (\mathbb{Q} \oplus X), d) \arrow[u, "\psi", "\sim"']
\end{tikzcd}$$

un modèle semi-libre minimal de $\varphi$ de $(A, d)$-modules.
Le morphisme $\varphi$ admet une rétraction homotopique de $(A, d)$-modules s'il existe un morphisme

$$\tau : (A \otimes \wedge V, d) \to (A, d)$$

de $(A, d)$-modules tel que $\tau \circ i = id$.

# Approximations rationnelles de $\mathrm{secat}$, $\mathrm{cat}$, $\mathrm{TC}$

Soit $F \to E \xrightarrow{p} B$ une fibration où $E$ et $B$ sont des espaces simplement connexes de type fini.

En appliquant $A_{PL}$ à $j^n(p)$ nous obtenons

$$A_{PL}(B) \xrightarrow{A_{PL}(j^n(p))} A_{PL}(*_B^n E)$$

**Definition.**

- $\mathrm{secat}_0(p) \leq n$ si $A_{PL}(j^n(p))$ admet une retraction homotopique dans $AGDC$.
- $\mathrm{Msecat}(p) \leq n$ if $A_{PL}(j^n(p))$ admet une rétraction homotopique de $A_{PL}(B)$ modules.

Pour la catégorie ($p = ev_1$) ces invariants sont notés $\mathrm{cat}_0$ et $\mathrm{Mcat}$.
Pour $\mathrm{TC}$ ($p = \pi : X^I \to X \times X$) on utilise les notations $\mathrm{TC}_0(X)$ et $\mathrm{MTC}(X)$.

**Proposition.** Si $p : E \to B$ est une fibration où $E$ et $B$ sont des espaces simplement connexes de type fini, on a

$$\mathrm{nil}\,\mathsf{ker}(p^*) \leq \mathrm{Hsecat}(p) \leq \mathrm{Msecat}(p) \leq \mathrm{secat}_0(p) \leq \mathrm{secat}(p)$$

En particulier, si $X$ est simplement connexe de type fini, on a

$$\mathrm{cuplength}(X) \leq e_{\mathbb{Q}}(X) \leq \mathrm{Mcat}(X) \leq \mathrm{cat}_0(X) \leq \mathrm{cat}(X)$$

et

$$\mathrm{nil}\,\mathsf{ker}\cup_X \leq \mathrm{HTC}(X) \leq \mathrm{MTC}(X) \leq \mathrm{TC}_0(X) \leq \mathrm{TC}(X)$$

De plus, $A_{PL}$ transformant pfh en sah, on a

**Proposition.** si $X$ est simplement connexe de type fini,

$$\mathrm{cat}_0(X) \leq \mathrm{TC}_0(X) \leq \mathrm{cat}_0(X \times X).$$

# Caractérisation de $\mathrm{cat}_0$ par Félix et Halperin

Soit $X$ simplement connexe de type fini et soit $(\Lambda V, d)$ un modèle minimal de $X$.

Pour tout $n \geq 1$, $(\Lambda^{\geq n+1} V, d)$ est un idéal différentiel et on a une projection

$$p_n : (\Lambda V, d) \to (\Lambda V / \Lambda^{\geq n+1} V, \bar{d})$$

**Théorème** (Félix, Halperin) $\mathrm{cat}_0(X) \leq n$ ssi la projection

$$p_n : (\Lambda V, d) \to (\Lambda V / \Lambda^{\geq n+1} V, \bar{d})$$

admet une rétraction homotopique dans AGDC.

# Caractérisation de $\mathrm{cat}_0$ par Félix et Halperin

Cette caractérisation a été très importante pour étudier la catégorie en homotopie rationnelle. Notons en particulier:

- $\mathrm{Mcat}(X) \leq n$ ssi $(\Lambda V, d) \to (\Lambda V/\Lambda^{\geq n+1} V, \bar{d})$ admet une rétraction homotopique de $(\Lambda V, d)$-modules.
- $e_0(X) \leq n$ ssi $(\Lambda V, d) \to (\Lambda V/\Lambda^{\geq n+1} V, \bar{d})$ est injective en cohomologie.
- (K. Hess) $\mathrm{cat}_0 = \mathrm{Mcat}$
- (B. Jessup) $\mathrm{Mcat}(X \times S^n) = \mathrm{Mcat}(X) + 1$
- (Y. Félix, S. Halperin, J.-M. Lemaire) $\mathrm{cat}_0(X \times Y) = \mathrm{cat}_0(X) + \mathrm{cat}_0(Y)$
- (Y. Félix, S. Halperin, J.-M. Lemaire) Si $X$ est un espace à dualité de Poincaré, $\mathrm{cat}_0(X) = e_0(X)$.

# Généralisation de l'approche "Félix-Halperin"

Les premiers résultats dans ce sens sont dus à A. Fassó-Velenik [FV]. Ici on décrit l'approche plus récente due à J. Carrasquel [C].

Soit $p : E \to B$ une fibration, soit $\varphi : A \to C$ un modèle surjectif de $p$ (dans ADGC) et soit $K = \ker(\varphi)$.

On considère un modèle relatif $i$ de la projection

$$A^{\otimes n+1} \to A^{\otimes n+1}/K^{\otimes n+1}$$

et on a: $\mathrm{secat}_0(p) \leq n$ ssi il existe un morphisme $\tau$ dans AGDC tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd}
(A^{\otimes n+1}, d) \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "i"'] & & (A, d) \\
& (A^{\otimes n+1} \otimes \Lambda W, d) \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}$$

# Une borne supérieure pour $\mathrm{secat}_0$, $\mathrm{TC}$

**Théorème** (J. Carrasquel [C]) Si la projection $(A, d) \to (A/K^{n+1}, \bar{d})$ admet une rétraction homotopique dans *AGDC* alors $\mathrm{secat}_0(p) \leq n$.

Ce résultat généralise le théorème suivant établi pour $\mathrm{TC}_0$:

**Théorème** (B. Jessup, P.-E. Parent, A. Murillo [JMP]) Soit $X$ un espace simplement connexe et de type fini. Soit $(\Lambda V, d)$ un modèle de Sullivan de $X$ et soit $\mu : \Lambda V \otimes \Lambda V \to \Lambda V$ la multiplication.

Si la projection $(\Lambda V \otimes \Lambda V, d) \to (\Lambda V \otimes \Lambda V/(\ker \mu)^{n+1}, \bar{d})$ admet une rétraction homotopique dans *AGDC* alors $\mathrm{TC}_0(X) \leq n$.

**Corollaire.** Si $(A, d)$ un modèle de $X$ dans AGDC avec multiplication $\mu_A$ alors

$$\mathrm{TC}_0(X) \leq \mathrm{nil} \ker \mu_A$$

# Applications

Soit $X$ un espace simplement connexe et de type fini.

**Théorème** Si $X$ est formel alors

$$\mathrm{nil}\,\ker \cup_X = \mathrm{HTC}(X) = \mathrm{MTC}(X) = \mathrm{TC}_0(X)$$

- L'égalité $\mathrm{nil}\,\ker \cup_X = \mathrm{TC}_0(X)$ a premièrement été établie par L. Lechuga et A. Murillo [LM] .
- L'égalité $\mathrm{nil}\,\ker \cup_X = \mathrm{MTC}(X)$ avait été anterieurement établie dans [FGKV] par l'approche que nous allons maintenant décrire.

**Exercice:** [JPM] Si $X$ admet un modèle minimal de la forme $(\Lambda V, d)$ où $V$ est concentré en degrés impairs alors

$$\mathrm{TC}_0(X) = \mathrm{cat}_0(X)$$

Indication: $H^*(X)$ est à dualité de Poincaré et la classe fondamentale peut être représentée par le produit de tous les générateurs de $V$.

# Approche par les joints

Soit $p : E \to B$ une fibration de fibre $F$.

But: construire un “petit” modèle explicite de $*^n F \to *^n_B E \overset{j^n(p)}{\to} B$ à partir d'un modèle de $p$.

On démarre avec un modèle semi-libre minimal de $p$:

$$(A, d) \rightarrowtail (A \otimes H, d) \longrightarrow (H, 0)$$

où l'e.v.g. $H \cong H^*(F)$. Écrivons $H = \mathbb{Q} \oplus \overline{H}$.

La cohomologie de $*^n F = \underbrace{F * \cdots * F}_{n+1 \text{ facteurs}}$ est linéairement donnée par:

$$H^*(*^n F) \cong \mathbb{Q} \oplus s^{-n}(\overline{H}^{\otimes n+1})$$

# Approche par les joints

**Théorème** ([FGKV]) Un modèle semi-libre minimal de $j^n(p)$ est donné par

$$(A,d) \rightarrowtail (A \otimes (\mathbb{Q} \oplus s^{-n}(\overline{H}^{\otimes n+1})), d) \longrightarrow (\mathbb{Q} \oplus s^{-n}(\overline{H}^{\otimes n+1}), 0)$$

où $(s^{-n}V)^k = V^{k-n}$ et $d$ est donnée explicitement (tableau).

**Corollaire**

- $\mathrm{Msecat}(p) \leq n \Leftrightarrow (A,d) \to (A \otimes (\mathbb{Q} \oplus s^{-n}(\overline{H}^{\otimes n+1})), d)$ admet une rétraction de $(A,d)$-modules.
- $Hsecat(p) \leq n \Leftrightarrow H(A,d) \to H(A \otimes (\mathbb{Q} \oplus s^{-n}(\overline{H}^{\otimes n+1})), d)$ est injective.

# Application à TC

On démarre avec le modèle de $\pi$ déjà vu:

$$(\Lambda(V \oplus V'), d) \rightarrowtail (\Lambda(V \oplus V') \otimes \Lambda sV, d)$$

et on obtient un modèle semi-libre de $j^n(\pi)$

$$(\Lambda V \otimes \Lambda V, d) \rightarrowtail (J_n, d) \longrightarrow (\mathbb{Q} \oplus s^{-n}(\Lambda^+ \overline{V})^{\otimes n+1}, 0)$$

avec $J_n = \Lambda V \otimes \Lambda V \otimes (\mathbb{Q} \oplus s^{-n}(\Lambda^+ sV)^{\otimes n+1})$ et une différentielle explicite.

**Proposition.** ([FGKV]) Si $(A, d)$ un modèle de $X$ dans AGDC avec multiplication $\mu_A$ alors

$$\mathrm{MTC}(X) \leq \mathrm{nil} \ker \mu_A$$

En particulier, si $X$ est formel, $\mathrm{nil} \ker \cup(X) = \mathrm{HTC}(X) = \mathrm{MTC}(X)$.

# Application a TC

Et si $X$ est non formel?

**Exemple.** L'espace (non formel) $X = S^3_a \vee S^3_b \cup_{[a,[a,b]]} e^8 \cup_{[b,[a,b]]} e^8$ ayant pour modèle minimal

$$\Lambda V = \Lambda(a_3, b_3, u_5, \text{degré} > 8),\ da = db = 0\ \ du = ab$$

satisfait

$$\mathrm{nil}\ker \cup_X = 2 \quad \text{and} \quad \mathrm{HTC}(X) = \mathrm{MTC}(X) = 3.$$

**Théorème.** ([FGKV]) (i) Pour tout $n$, il existe un CW-complexe fini $X$ tel que

$$\mathrm{MTC}(X) - \mathrm{nil}\ker \cup_X \geq n.$$

(ii) Il existe un espace $X$ tel que $\mathrm{MTC}(X) = \infty$ et $\mathrm{nil}\ker \cup_X < \infty$.

# Références générales

## Références générales sur la LS-catégorie:

[CLOT] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, and D. Tanré: *Lusternik-Schnirelmann category*, AMS Mathematical Surveys and Monographs 103 (2003).

[D] J.P. Doeraene. LS-category in a model category. *J. Pure App. Algebra* 84 (1993), 215-261.

[J1] I.M. James: On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann, *Topology* 17 (1978), 331-348.

[J2] I.M. James: Lusternik-Schnirelmann category, *Handbook of Algebraic Topology*, Elsevier (1995), 1293-1310.

## Références générales sur l'homotopie rationnelle:

[FHT] Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas: *Rational homotopy theory*, GTM 200, Springer-Velag (2001).

[FOT] Y. Félix, J. Oprea, and D. Tanré: *Algebraic Models in Gepmetry*, Oxford,

# Références spécifiques à secat et TC


[C] J.-G. Carrasquel-Vera: Computations in rational sectional category, arXiv:1205.45

[DEH1] J.P. Doerane and M. El Haouari. *Up to one approximations of sectional category and topological complexity*, Topology and its applications (2013) DOI 10.1016/j.topol.2013.02.001.

[DEH2] J.P. Doeraene, M. El Haouari, When does secat equal relcat?, *Bull. Belg. Math. Soc.* (2013).

[F1] M. Farber: Topological Complexity of Motion Planning, *Discrete Comput. Geom.* 29 (2003), 211-221.

[F2] M. Farber: Instabilities of Robot Motion, *Topology Appl.* 140 (2004), 245-266.

[F3] M. Farber: Topology of robot motion planning,“Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology”, 185-230, NATO Sci. Ser. II Math. phys. Chem., 217, Springer, 2006.

[FG] M. Farber, M. Grant: Symmetric motion planning. Topology and robotics, 85?104, *Contemp. Math.*, 438, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[FTY] M. Farber, S. Tabachnikov, S. Yuzvinsky:. Topological robotics: motion planning in projective spaces. *Int. Math. Res. Not.* 34 (2003), 1853-1870.

[FV] A. Fassò Velenik: *Relative homotopy invariants of the type of the Lusternik-Schnirelmann category*, Ph.D. thesis, FU Berlin (2002).

# Références spécifiques à secat et TC


[FGKV] L. Fernández Suárez, P. Ghienne, T. Kahl, L. Vandembroucq. Joins of DGA modules and sectional category. *Algebraic & Geometric Topology* 6 (2006), 119-144.

[GCV1] J.M. García Calcines, L. Vandembroucq. Weak sectional category, *Journal of the London Math. Soc.* **82**(3) (2010), 621-642.

[GCV2] J. M. García Calcines and L. Vandembroucq. Topological complexity and the homotopy cofibre of the diagonal map, *Math. Z* (2012) DOI 10.1007/s00209-012-1061-5.

[LM] L. Lechuga, A. Murillo,Topological complexity of formal spaces. *Contemp. Math.* 438 (2007),105-114.

[LS]G. Lupton and J. Scherer. Topological complexity of *H*-spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2012.

[JMP] B. Jessup, A. Murillo, P.-E. Parent: Rational Topological Complexity, *Algebraic & Geometric Topology*12 (2012), 1789-1801.

[R] Y. Rudyak: On higher analogs of topological complexity. *Topology Appl.* 157 (2010), no. 5, 916?920.

[S] A.S. Schwarz: The genus of a fiber space, *Amer. Math. Soc. Transl.* 55 (1966), 49-140.