

A History of Spectral Sequences

John McCleary, Vassar College

June 10, 2013

Problem 17. What are the relations connecting the homology structure of the bundle, base space, fiber and group?

Samuel Eilenberg 1949

Problem 17. What are the relations connecting the homology structure of the bundle, base space, fiber and group?

Samuel Eilenberg 1949

It is now abundantly clear that the spectral sequence is one of the fundamental algebraic structures needed for dealing with topological problems.

William S. Massey 1955

Witold Hurewicz (1904–1956)



Heinz Hopf (1894–1971) et Hans Freudenthal (1905–1990)



Heinz Hopf (1894–1971) et Hans Freudenthal (1905–1990)



“Wie kann man einen Überblick über sie gewinnen ...?”

Hassler Whitney (1907–1989)



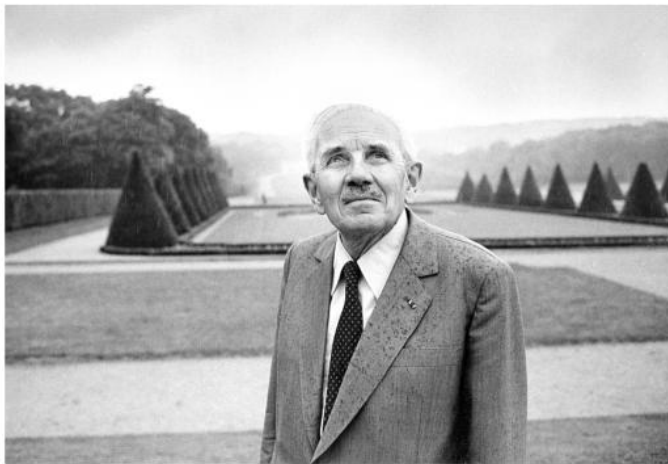
George de Rham (1903–1989)



Samuel Eilenberg (1913–1998) et Saunders Mac Lane (1909–2005)



Jean Leray (1906–1998)



Jean Leray - Parc de Sceaux (1985)

OFLAG XVIIA



I. — PERSONNALITÉS DU CAMP

Service médical :

Médecin Capitaine Jean GOULARD.

Médecin Capitaine Georges GOUMET.

Médecin Capitaine Victor ZEUDE.

Capitaine Lucien RAFFAELI (condamné le 6 avril 1943 à 2 ans de prison).

Directeur de l'Université : Lieutenant LERAY.

Directeur des Sports : Lieutenant MARCHAND.

II. — MOUVEMENTS DE P. G. AU CAMP

Le 14 septembre 1943. — Arrivée d'un convoi composé d'un Général et d'Officiers supérieurs venant de Hadamar (Oflag XVII B).

Le transfert de Hadamar à Edelbach s'effectue dans des conditions pénibles pour les hommes âgés.

1^{er} décembre 1943. — 16 Officiers ont été mutés à l'Oflag X C par mesure disciplinaire.

Leray, *Cours de Topologie Algébrique professé en captivité*

Mon dessein initial fut d'imaginer une théorie des équations et des transformations s'appliquant directement aux espaces topologiques. J'ai dû recourir à des procédés nouveaux, renoncer à des procédés classiques, et il m'est impossible d'exposer cette théorie des équations et des transformations, sans, d'une part, donner une nouvelle définition de l'anneau d'homologie et d'autre part, adapter les raisonnements cités de M. Hopf à des hypothèses plus générales que les siennes.

La couverture

- 1) an abstract *complex*, a finitely generated graded module K over a ring R ,
- 2) equipped with a differential d of degree 1.

La couverture

- 1) an abstract *complex*, a finitely generated graded module K over a ring R ,
- 2) equipped with a differential d of degree 1.

K is made *concrete over a space* X if there is an assignment for all $0 \neq k \in K \mapsto |k| \subset X$, the *support of* k and required to satisfy $|d(k)| \subset |k|$.

La couverture

- 1) an abstract *complex*, a finitely generated graded module K over a ring R ,
- 2) equipped with a differential d of degree 1.

K is made *concrete over a space* X if there is an assignment for all $0 \neq k \in K \mapsto |k| \subset X$, the *support of* k and required to satisfy $|d(k)| \subset |k|$.

Taking a *section* over a subspace of $F \subset X$, we get a new concrete complex over F , FK with supports $|Fk| = F \cap |k|$, and where $F \cap |k| = \emptyset$, set $k = 0$, that is, let $K_{X-F} = \{k \in K \mid |k| \cap F = \emptyset\}$. Then $FK = K/K_{X-F}$. We write xK for a section over $\{x\}$.

For two concrete complexes K and K' over X and $x \in X$, consider

$$r_x: K \otimes_R K' \rightarrow xK \otimes_R xK'$$

given by the tensor product of the quotients. If h is in $K \otimes K'$, let $|h| = \{x \in X \mid r_x(h) \neq 0\}$. This defines a concrete complex $K \bigcirc K'$, the *intersection* of K and K' .

For two concrete complexes K and K' over X and $x \in X$, consider

$$r_x: K \otimes_R K' \rightarrow xK \otimes_R xK'$$

given by the tensor product of the quotients. If h is in $K \otimes K'$, let $|h| = \{x \in X \mid r_x(h) \neq 0\}$. This defines a concrete complex $K \bigcirc K'$, the *intersection* of K and K' .

A *couverture* is a concrete complex K for which all supports are closed and xK is acyclic for all $x \in X$. If X is normal, then the collection of all couvertures on X is a differential graded R -algebra with product given by $\bigcirc$. Its cohomology is *l'anneau d'homologie* of X , $H(X, R)$.

Jean-Louis Koszul (1921–) et Henri Cartan (1904–2008)



Cartan: *Rapport sur
le Colloque International de Topologie Algébrique, Paris 1947*

*Je voudrais néanmoins tenter de caractériser ici en quelques lignes la tentative qui avait fait l'objet de mon exposé du 27 juin 1947.
... Cette théorie diffère de celle d'Eilenberg et Steenrod ... sur plusieurs points importants. Tout d'abord, elle ne vise à axiomatiser que la cohomologie au sens de Čech, ou au sens d'Alexander ... au contraire, la théorie d'Eilenberg-Steenrod se donnait pour but d'englober toutes les théories de l'homologie ou de la cohomologie. Précisément à cause de sa généralité, la théorie d'Eilenberg-Steenrod ne pouvait comporter de théorème d'unicité que pour des espaces de nature très particulière; tandis que l'intérêt principal de notre théorie réside dans ses théorèmes d'unicité.*

Cartan, Henri: *Notions d'algebre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie*. Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 1527. Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, 1951.

Cartan, Henri: *Notions d'algebre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie*. Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 1527. Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, 1951.

At this stage, topology may be thrown out, leaving only the algebraic facts in evidence.

C. Chevalley

Armand Borel (1923–2003) et Jean-Pierre Serre (1926–)



Sur son these

“J’avais remarqué que la théorie de Leray permet d’aborder ce calcul en procédant par récurrence sur n , pourvu que l’on dispose d’un espace fibré E ayant les propriétés suivantes: a) E est contractile, b) la base de E est un $K(\pi, n)$, ce qui entraîne c) les fibres de E sont des $K(\pi, n - 1)$.”

J.-P. Serre

Les designations

Leray: *l'anneau d'homologie* 1946

Les designations

Leray: *l'anneau d'homologie* 1946

Koszul: *la suite d'homologies* 1947

Les designations

Leray: *l'anneau d'homologie* 1946

Koszul: *la suite d'homologies* 1947

Cartan: *la suite de Leray-Koszul* 1947

Les designations

Leray: *l'anneau d'homologie* 1946

Koszul: *la suite d'homologies* 1947

Cartan: *la suite de Leray-Koszul* 1947

Leray: *l'anneau spectrale* 1950

Les designations

Leray: *l'anneau d'homologie* 1946

Koszul: *la suite d'homologies* 1947

Cartan: *la suite de Leray-Koszul* 1947

Leray: *l'anneau spectrale* 1950

Serre: *la suite spectrale* 1951

Reception

Steenrod to George Whitehead: “*earth-shaking results on the homotopy groups of spheres.*”

Reception

Steenrod to George Whitehead: *“earth-shaking results on the homotopy groups of spheres.”*

“upheaval within topology itself resulting from the use of fiber space techniques. . . . The most striking feature of the conference was the frequent use of the same apparatus in two or more widely separated disciplines, with strong suggestions of a probable unification of geometry on some higher level.”