L'infini en mathématique ∞

Rencontre: géométrie ,topologie, physique et mathématiques

Nadir Maaroufi

Univ internationale de Rabat

Rabat les 6-8 juin 2013

Introduction-Questions

Introduction-Questions

Penser à l'infini préexiste-il au savoir compter ?

Introduction-Questions

Penser à l'infini préexiste-il au savoir compter ?

Depuis quand alors on y pense ?

Introduction-Questions

Penser à l'infini préexiste-il au savoir compter ?

Depuis quand alors on y pense ?

Qu'est ce que les mathématiques viennent faire là-dedans ?

Introduction-Questions

Penser à l'infini préexiste-il au savoir compter ?

Depuis quand alors on y pense ?

Qu'est ce que les mathématiques viennent faire là-dedans ?

Comment l'infini a-t-il été abordé en mathématiques ?

- Grecs

- Grecs
- Moyen âge

- Grecs
- Moyen âge
- XVII ème siècle

- Grecs
- Moyen âge
- XVII ème siècle
- XIX ème siècle

Grecs

Les Grecs

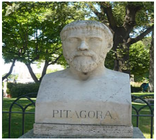


FIGURE: Pythagore
606-569 av. J-C

École Pythagoricienne

Les Grecs

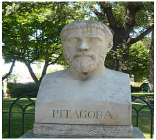


FIGURE: Pythagore
606-569 av. J-C

École Pythagoricienne

- La domination du nombre

Les Grecs

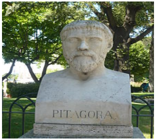


FIGURE: Pythagore 606-569 av. J-C

École Pythagoricienne

- La domination du nombre
- Figure géométrique $\longleftrightarrow$ Nombre

Les Grecs

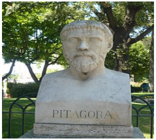


FIGURE: Pythagore 606-569 av. J-C

École Pythagoricienne

- La domination du nombre
- Figure géométrique $\longleftrightarrow$ Nombre
- L'incommensurabilité ou l'irrationalité '$\sqrt{2}$'

Les Grecs

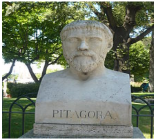


FIGURE: Pythagore 606-569 av. J-C

École Pythagoricienne

- La domination du nombre
- Figure géométrique $\longleftrightarrow$ Nombre
- L'incommensurabilité ou l'irrationalité '$\sqrt{2}$'
- Scandale logique !

Les Grecs

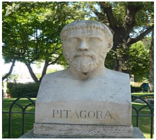


FIGURE: Pythagore
606-569 av. J-C

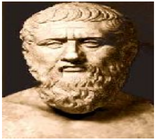


FIGURE: Zénon
480-420 av. J-C

École Pythagoricienne

- La domination du nombre
- Figure géométrique $\longleftrightarrow$ Nombre
- L'incommensurabilité ou l'irrationalité '$\sqrt{2}$'
- Scandale logique !

Paradoxes :

Les Grecs

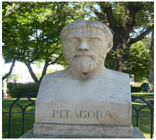


FIGURE: Pythagore 606-569 av. J-C

École Pythagoricienne

- La domination du nombre
- Figure géométrique $\longleftrightarrow$ Nombre
- L'incommensurabilité ou l'irrationalité '$\sqrt{2}$'
- Scandale logique !

Paradoxes :

- Dichotomie + Achille et la tortue

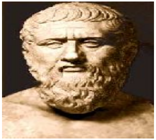


FIGURE: Zénon 480-420 av. J-C

Les Grecs

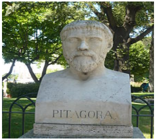


FIGURE: Pythagore
606-569 av. J-C

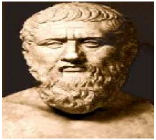


FIGURE: Zénon
480-420 av. J-C

École Pythagoricienne

- La domination du nombre
- Figure géométrique $\longleftrightarrow$ Nombre
- L'incommensurabilité ou l'irrationalité '$\sqrt{2}$'
- Scandale logique !

Paradoxes :

- Dichotomie + Achille et la tortue
  Espace/temps sont indéfiniment divisibles !

Les Grecs

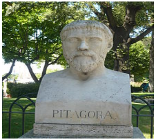


FIGURE: Pythagore 606-569 av. J-C

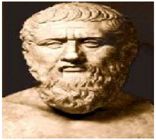


FIGURE: Zénon 480-420 av. J-C

École Pythagoricienne

- La domination du nombre
- Figure géométrique $\longleftrightarrow$ Nombre
- L'incommensurabilité ou l'irrationalité '$\sqrt{2}$'
- Scandale logique !

Paradoxes :

- Dichotomie + Achille et la tortue
  Espace/temps sont indéfiniment divisibles !
- La flèche + Les rangées mobiles

Les Grecs

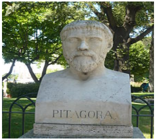


FIGURE: Pythagore
606-569 av. J-C

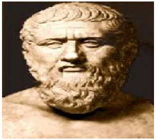


FIGURE: Zénon
480-420 av. J-C

École Pythagoricienne

- La domination du nombre
- Figure géométrique $\longleftrightarrow$ Nombre
- L'incommensurabilité ou l'irrationalité '$\sqrt{2}$'
- Scandale logique !

Paradoxes :

- Dichotomie + Achille et la tortue
  Espace/temps sont indéfiniment divisibles !
- La flèche + Les rangées mobiles
  Espace/temps constitués d'indivisibles !

Les Grecs

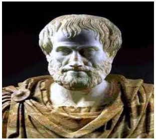


FIGURE: Aristote
384-322 av. J-C

Distinction de deux infinis

Les Grecs

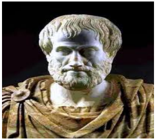


FIGURE: Aristote 384-322 av. J-C

Distinction de deux infinis

- Infini potentiel

Les Grecs

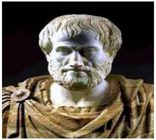


FIGURE: Aristote 384-322 av. J-C

Distinction de deux infinis

- Infini potentiel
- Infini actuel

Les Grecs

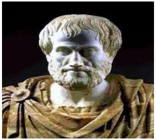


FIGURE: Aristote
384-322 av. J-C

FIGURE: Euclide
325-265 av. J-C

Distinction de deux infinis

- Infini potentiel
- Infini actuel

Rigueur et axiomatisation

Les Grecs

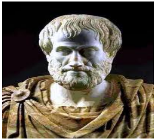


FIGURE: Aristote
384-322 av. J-C

FIGURE: Euclide
325-265 av. J-C

Distinction de deux infinis

- Infini potentiel
- Infini actuel

Rigueur et axiomatisation

- Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Les Grecs

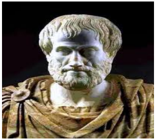


FIGURE: Aristote
384-322 av. J-C

FIGURE: Euclide
325-265 av. J-C

Distinction de deux infinis

- Infini potentiel
- Infini actuel

Rigueur et axiomatisation

- Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$
- Démonstration de $|\mathcal{P}| = +\infty$

Les Grecs

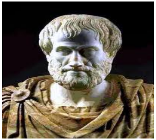


FIGURE: Aristote
384-322 av. J-C

FIGURE: Euclide
325-265 av. J-C

Distinction de deux infinis

- Infini potentiel
- Infini actuel

Rigueur et axiomatisation

- Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$
- Démonstration de $|\mathcal{P}| = +\infty$
- Axiome : le tout est plus grand que les parties

Les Grecs

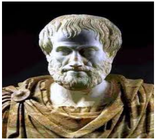


FIGURE: Aristote
384-322 av. J-C

FIGURE: Euclide
325-265 av. J-C

Distinction de deux infinis

- Infini potentiel
- Infini actuel

Rigueur et axiomatisation

- Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$
- Démonstration de $|\mathcal{P}| = +\infty$
- Axiome : le tout est plus grand que les parties

Les Grecs

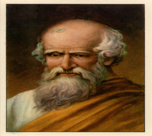


FIGURE: Archimède 287-212 av. J-C

Axiome et méthode des anciens

Les Grecs

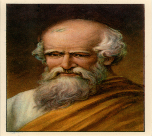


FIGURE: Archimède
287-212 av. J-C

Axiome et méthode des anciens

- Infini potentiel

Les Grecs

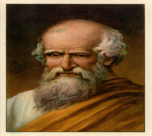


FIGURE: Archimède 287-212 av. J-C

Axiome et méthode des anciens

- Infini potentiel
- Axiome :
  pour tout deux réels positifs a et b, tels que $a < b$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > b$.

Les Grecs

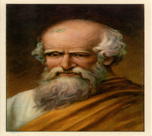
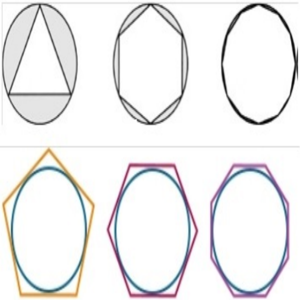


Figure: Archimède 287-212 av. J-C



Axiome et méthode des anciens

- Infini potentiel
- Axiome :
  pour tout deux réels positifs a et b, tels que $a < b$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > b$.
- Méthode d'exhaustion

Les Grecs

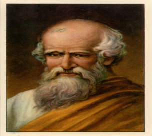
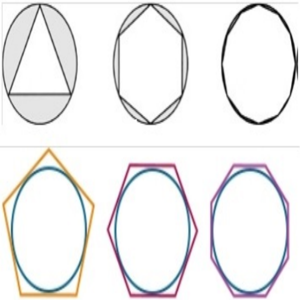


FIGURE: Archimède 287-212 av. J-C



Axiome et méthode des anciens

- Infini potentiel
- Axiome :
  pour tout deux réels positifs a et b, tels que $a < b$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $na > b$.
- Méthode d'exhaustion
- Approximation de π

$$\frac{220}{71} \leq \pi \leq \frac{22}{7}$$

Les Grecs-Résumé

Les Grecs-Résumé

Distinction infini potentiel/actuel

Les Grecs-Résumé

Distinction infini potentiel/actuel

Acceptation de l'infini potentiel+connotation négative

Les Grecs-Résumé

Distinction infini potentiel/actuel

Acceptation de l'infini potentiel+connotation négative

Axiome d'Euclide

Les Grecs-Résumé

Distinction infini potentiel/actuel

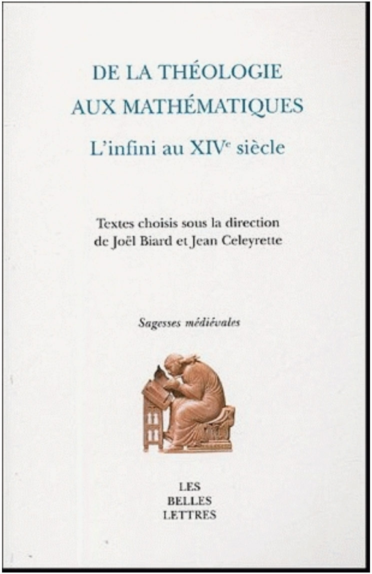
Acceptation de l'infini potentiel+connotation négative

Axiome d'Euclide

Axiome d'Archimède

Moyen âge

Livre


DE LA THÉOLOGIE
AUX MATHÉMATIQUES
L'infini au XIVe siècle
Textes choisis sous la direction
de Joël Biard et Jean Celeyrette
Sagesses médiévales
LES
BELLES
LETTRES

Moyen âge

FIGURE: Thabit ibn Qurra 826-901

Divers ordres d'infini

Moyen âge

FIGURE: Thabit ibn Qurra 826-901

Divers ordres d'infini

- Egalité de 2 infinis : |nombre pairs|=|nombres impairs|.

Moyen âge

FIGURE: Thabit ibn Qurra 826-901

Divers ordres d'infini

- Egalité de 2 infinis : |nombre pairs|=|nombres impairs|.
- Infini=nombre

Moyen âge

FIGURE: Thabit ibn Qurra 826-901

Divers ordres d'infini

- Egalité de 2 infinis : |nombre pairs|=|nombres impairs|.
- Infini=nombre+ tentative de calcul.

Moyen âge

FIGURE: Thabit ibn Qurra 826-901

FIGURE: John Duns Scot 1266-1308

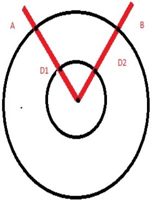
Divers ordres d'infini

- Egalité de 2 infinis : $|\text{nombre pairs}| = |\text{nombres impairs}|$.
- Infini=nombre+ tentative de calcul.

Retour sur l'axiome d'Euclide

Moyen âge

FIGURE: Thabit ibn Qurra 826-901



Divers ordres d'infini

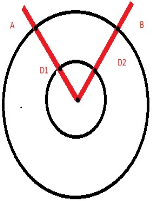
- Egalité de 2 infinis : |nombre pairs|=|nombres impairs|.
- Infini=nombre+ tentative de calcul.

Retour sur l'axiome d'Euclide

- Paradoxe des cercles.

Moyen âge

FIGURE: Thabit ibn Qurra 826-901



Divers ordres d'infini

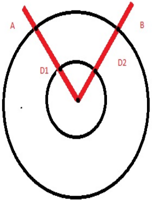
- Egalité de 2 infinis : |nombre pairs|=|nombres impairs|.
- Infini=nombre+ tentative de calcul.

Retour sur l'axiome d'Euclide

- Paradoxe des cercles.
- Axiome d'Euclide applicable qu'au fini .

Moyen âge

FIGURE: Thabit ibn Qurra 826-901



Divers ordres d'infini

- Egalité de 2 infinis : |nombre pairs|=|nombres impairs|.
- Infini=nombre+ tentative de calcul.

Retour sur l'axiome d'Euclide

- Paradoxe des cercles.
- Axiome d'Euclide applicable qu'au fini .
- Equivalence
  entre ensemble infini et l'une de ses partie.

Le moyen âge-Résumé

Le moyen âge-Résumé

Connotation positive de l'infini

Le moyen âge-Résumé

Connotation positive de l'infini

Doute sur la validité de l'axiome d'Euclide pour les ensembles infinis

XVII ème siècle

XVII ème siècle

L'infini et la raison

FIGURE: Descartes 1596-1650

XVII ème siècle

FIGURE: Descartes 1596-1650

L'infini et la raison

- (Equation $\leftrightarrow$ courbe) $\rightarrow$ fonction.

XVII ème siècle

FIGURE: Descartes 1596-1650

L'infini et la raison

- (Equation $\leftrightarrow$ courbe) $\rightarrow$ fonction.
- Preuve ontologique de l'existence de Dieu.

XVII ème siècle

FIGURE: Descartes 1596-1650

L'infini et la raison

- (Equation $\leftrightarrow$ courbe) $\rightarrow$ fonction.
- Preuve ontologique de l'existence de Dieu.
- Héritage d'Aristote.

XVII ème siècle

FIGURE: Descartes 1596-1650

L'infini et la raison

- (Equation $\leftrightarrow$ courbe) $\rightarrow$ fonction.
- Preuve ontologique de l'existence de Dieu.
- Héritage d'Aristote.
- Infini=indéfini

XVII ème siècle

FIGURE: Descartes 1596-1650

FIGURE: Pascal 1623-1672

L'infini et la raison

- (Equation $\leftrightarrow$ courbe) $\rightarrow$ fonction.
- Preuve ontologique de l'existence de Dieu.
- Héritage d'Aristote.
- Infini=indéfini

Méthode des indivisible et métaphore

XVII ème siècle

FIGURE: Descartes 1596-1650

FIGURE: Pascal 1623-1672

L'infini et la raison

- (Equation $\leftrightarrow$ courbe) $\rightarrow$ fonction.
- Preuve ontologique de l'existence de Dieu.
- Héritage d'Aristote.
- Infini=indéfini

Méthode des indivisible et métaphore

- Métaphore = seul moyen rigoureux d'introduire l'infini.

XVII ème siècle

FIGURE: Descartes 1596-1650

FIGURE: Pascal 1623-1672

L'infini et la raison

- (Equation $\leftrightarrow$ courbe) $\rightarrow$ fonction.
- Preuve ontologique de l'existence de Dieu.
- Héritage d'Aristote.
- Infini=indéfini

Méthode des indivisible et métaphore

- Métaphore = seul moyen rigoureux d'introduire l'infini.
- Critique de l'atomisme.

XVII ème siècle

FIGURE: Descartes 1596-1650

FIGURE: Pascal 1623-1672

L'infini et la raison

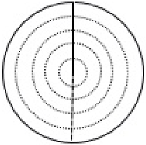
- (Equation $\leftrightarrow$ courbe) $\rightarrow$ fonction.
- Preuve ontologique de l'existence de Dieu.
- Héritage d'Aristote.
- Infini=indéfini

Méthode des indivisible et métaphore

- Métaphore = seul moyen rigoureux d'introduire l'infini.
- Critique de l'atomisme.

XVII ème siècle

FIGURE: Descartes 1596-1650



L'infini et la raison

- (Equation $\leftrightarrow$ courbe) $\rightarrow$ fonction.
- Preuve ontologique de l'existence de Dieu.
- Héritage d'Aristote.
- Infini=indéfini

Méthode des indivisible et métaphore

- Métaphore = seul moyen rigoureux d'introduire l'infini.
- Critique de l'atomisme.
- Infiniment petit $<$ Homme $<$ Infiniment grand.
- Développement méthode
  des indivisible introduite par Cavalieri et Roberval.

XVII ème siècle

FIGURE: Descartes 1596-1650

L'infini et la raison

- (Equation $\leftrightarrow$ courbe) $\rightarrow$ fonction.
- Preuve ontologique de l'existence de Dieu.
- Héritage d'Aristote.
- Infini=indéfini

Méthode des indivisible et métaphore

- Métaphore = seul moyen rigoureux d'introduire l'infini.
- Critique de l'atomisme.
- Infiniment petit $<$ Homme $<$ Infiniment grand.
- Développement méthode
  des indivisible introduite par Cavalieri et Roberval.
- On peut approcher le fini par un processus infini !

XVII ème siècle

Introduction du symbole ∞

FIGURE: John Wallis 1616-1703

XVII ème siècle

FIGURE: John Wallis 1616-1703

Introduction du symbole ∞

- Pour la première fois en 1655.

XVII ème siècle

FIGURE: John Wallis 1616-1703

Introduction du symbole ∞

- Pour la première fois en 1655.
- 1000 en romain, $\otimes$, $\subset$I$\supset$ puis M.

XVII ème siècle

FIGURE: John Wallis 1616-1703

Introduction du symbole ∞

- Pour la première fois en 1655.
- 1000 en romain, $\otimes$, $\subset\!\mathrm{I}\!\supset$ puis M.
- lettre grec ω.

XVII ème siècle

FIGURE: John Wallis 1616-1703

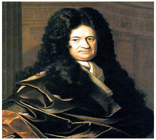


FIGURE: Leibniz 1646-1716

Introduction du symbole ∞

- Pour la première fois en 1655.
- 1000 en romain, $\otimes$, $\subset \mathrm{I} \supset$ puis M.
- lettre grec ω.

Introduction du calcul infinitésimal et intégral

XVII ème siècle

FIGURE: John Wallis 1616-1703

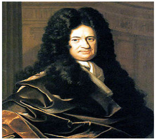


FIGURE: Leibniz 1646-1716

Introduction du symbole ∞

- Pour la première fois en 1655.
- 1000 en romain, $\otimes$, $\subset$I$\supset$ puis M.
- lettre grec ω.

Introduction du calcul infinitésimal et intégral

- Héritage de Descartes et Pascal + philosophie propre.

XVII ème siècle

FIGURE: John Wallis 1616-1703

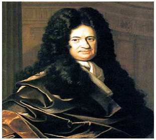


FIGURE: Leibniz 1646-1716

Introduction du symbole ∞

- Pour la première fois en 1655.
- 1000 en romain, $\otimes$, $\subset$I$\supset$ puis M.
- lettre grec ω.

Introduction du calcul infinitésimal et intégral

- Héritage de Descartes et Pascal + philosophie propre.
- Introduction de la fiction dx.

XVII ème siècle

FIGURE: John Wallis 1616-1703

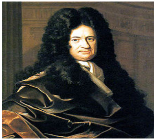


FIGURE: Leibniz 1646-1716

Introduction du symbole ∞

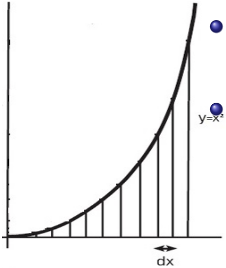
- Pour la première fois en 1655.
- 1000 en romain, $\otimes$, $\subset$I$\supset$ puis M.
- lettre grec ω.

Introduction du calcul infinitésimal et intégral

- Héritage de Descartes et Pascal + philosophie propre.
- Introduction de la fiction dx.
- Introduction d'une algèbre du calcul infinitésimal : $d(x+y)$, $d(x.y)$, $d(\frac{x}{y})$ et $d(x^n)$.

XVII ème siècle

FIGURE: John Wallis 1616-1703



Introduction du symbole ∞

- Pour la première fois en 1655.
- 1000 en romain, $\otimes$, $\subset$I$\supset$ puis M.
- lettre grec ω.

Introduction du calcul infinitésimal et intégral

- Héritage de Descartes et Pascal + philosophie propre.
- Introduction de la fiction dx.
- Introduction d'une algèbre du calcul infinitésimal : $d(x+y)$, $d(x.y)$, $d(\frac{x}{y})$ et $d(x^n)$.
- Introduction de la notion d'intégrale avec $\int dy = y$.

XVII ème siècle

FIGURE: John Wallis 1616-1703

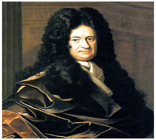


FIGURE: Leibniz 1646-1716

Introduction du symbole ∞

- Pour la première fois en 1655.
- 1000 en romain, $\otimes$, $\subset$I$\supset$ puis M.
- lettre grec ω.

Introduction du calcul infinitésimal et intégral

- Héritage de Descartes et Pascal + philosophie propre.
- Introduction de la fiction dx.
- Introduction d'une algèbre du calcul infinitésimal : $d(x+y)$, $d(x.y)$, $d(\frac{x}{y})$ et $d(x^n)$.
- Introduction de la notion d'intégrale avec $\int dy = y$.
- Intégration inverse de la différentiation.

XVII ème siècle

FIGURE: John Wallis 1616-1703

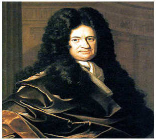


FIGURE: Leibniz 1646-1716

Introduction du symbole ∞

- Pour la première fois en 1655.
- 1000 en romain, $\otimes$, ⊂I⊃ puis M.
- lettre grec ω.

Introduction du calcul infinitésimal et intégral

- Héritage de Descartes et Pascal + philosophie propre.
- Introduction de la fiction dx.
- Introduction d'une algèbre du calcul infinitésimal : $d(x+y)$, $d(x.y)$, $d(\frac{x}{y})$ et $d(x^n)$.
- Introduction de la notion d'intégrale avec $\int dy = y$.
- Intégration inverse de la différentiation.
- Critique : pourquoi négliger dx à la fin. Si il sont égaux à 0 comment peut-on considérer leur rapports $\frac{dy}{dx}$?

XVII ème-Résumé

XVII ème-Résumé

Utilisation positive de l'infini

XVII ème-Résumé

Utilisation positive de l'infini

Développement du calcul infinitésimal

XVII ème-Résumé

Utilisation positive de l'infini

Développement du calcul infinitésimal

Mise en doute de l'axiome d'Archimède

XIX ème siècle

XIX ème siècle

Réhabilitation de l'infini actuel

FIGURE: Bolzano 1781-1848

XIX ème siècle

FIGURE: Bolzano 1781-1848

Réhabilitation de l'infini actuel

- Critique de l'infini potentiel.

XIX ème siècle

FIGURE: Bolzano 1781-1848

Réhabilitation de l'infini actuel

- Critique de l'infini potentiel.
- Construction de $\mathbb{N}$ par itération infinie.

XIX ème siècle

FIGURE: Bolzano 1781-1848

Réhabilitation de l'infini actuel

- Critique de l'infini potentiel.
- Construction de $\mathbb{N}$ par itération infinie.
- Équipotence(bijection)
  entre $[0, 1]$ et $[0, 2]$ aussi entre $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$

XIX ème siècle

FIGURE: Bolzano 1781-1848

Réhabilitation de l'infini actuel

- Critique de l'infini potentiel.
- Construction de $\mathbb{N}$ par itération infinie.
- Équipotence(bijection)
  entre $[0, 1]$ et $[0, 2]$ aussi entre $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$
- Ensemble infini n'obéit pas à l'axiome d'Euclide.

XIX ème siècle

FIGURE: Bolzano 1781-1848

Réhabilitation de l'infini actuel

- Critique de l'infini potentiel.
- Construction de $\mathbb{N}$ par itération infinie.
- Équipotence(bijection)
  entre $[0, 1]$ et $[0, 2]$ aussi entre $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$
- Ensemble infini n'obéit pas à l'axiome d'Euclide.
- Tentative de définir
  l'égalité entre deux ensembles de cardinaux infinis.

XIX ème siècle

FIGURE: Bolzano 1781-1848

FIGURE: Dedekind 1831-1916

Réhabilitation de l'infini actuel

- Critique de l'infini potentiel.
- Construction de $\mathbb{N}$ par itération infinie.
- Équipotence(bijection)
  entre $[0,1]$ et $[0,2]$ aussi entre $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$
- Ensemble infini n'obéit pas à l'axiome d'Euclide.
- Tentative de définir
  l'égalité entre deux ensembles de cardinaux infinis.

Définition d'ensemble infini

XIX ème siècle

FIGURE: Bolzano 1781-1848

FIGURE: Dedekind 1831-1916

Réhabilitation de l'infini actuel

- Critique de l'infini potentiel.
- Construction de $\mathbb{N}$ par itération infinie.
- Équipotence(bijection)
  entre $[0,1]$ et $[0,2]$ aussi entre $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$
- Ensemble infini n'obéit pas à l'axiome d'Euclide.
- Tentative de définir
  l'égalité entre deux ensembles de cardinaux infinis.

Définition d'ensemble infini

- Un ensemble infini=
  ensemble équipotent à une de ses parties propres.

XIX ème siècle

Figure: Bolzano 1781-1848

Figure: Dedekind 1831-1916

Réhabilitation de l'infini actuel

- Critique de l'infini potentiel.
- Construction de $\mathbb{N}$ par itération infinie.
- Équipotence(bijection)
  entre $[0, 1]$ et $[0, 2]$ aussi entre $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$
- Ensemble infini n'obéit pas à l'axiome d'Euclide.
- Tentative de définir
  l'égalité entre deux ensembles de cardinaux infinis.

Définition d'ensemble infini

- Un ensemble infini=
  ensemble équipotent à une de ses parties propres.
- Construction de $\mathbb{R}$ via les coupures de $\mathbb{Q}$.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

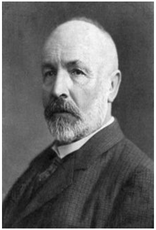


Figure: Cantor 1845-1918

$*$ Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

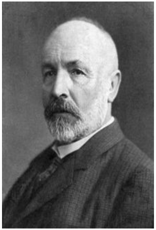


FIGURE: Cantor 1845-1918

$*$ Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.

$*$ $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

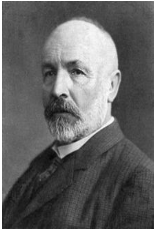


FIGURE: Cantor 1845-1918

* Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
* $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
* Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

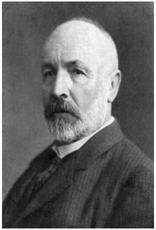


FIGURE: Cantor 1845-1918

* Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
* $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
* Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).
* Introduction de l'arithmétique des ordinaux.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

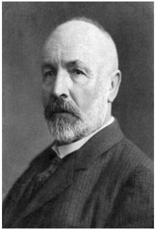


FIGURE: Cantor 1845-1918

- ∗ Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
- ∗ $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
- ∗ Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).
- ∗ Introduction de l'arithmétique des ordinaux.
- ∗ Infini potentiel : $\forall x\ \exists y\ x < y$.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

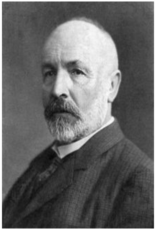


FIGURE: Cantor 1845-1918

- ∗ Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
- ∗ $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
- ∗ Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).
- ∗ Introduction de l'arithmétique des ordinaux.
- ∗ Infini potentiel : $\forall x \; \exists y \; x < y$.
- ∗ Infini actuel : $\exists \omega \; \forall x \; x < \omega$.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

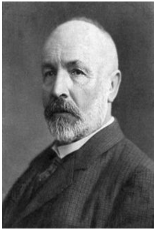


FIGURE: Cantor 1845-1918

* Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
* $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
* Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).
* Introduction de l'arithmétique des ordinaux.
* Infini potentiel : $\forall x \; \exists y \; x < y$.
* Infini actuel : $\exists \omega \; \forall x \; x < \omega$.
* Infinité de rationnels pour construire un irrationnel.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

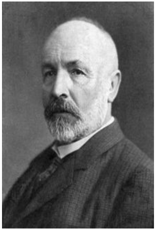


Figure: Cantor 1845-1918

- ∗ Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
- ∗ $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
- ∗ Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).
- ∗ Introduction de l'arithmétique des ordinaux.
- ∗ Infini potentiel : $\forall x \; \exists y \; x < y$.
- ∗ Infini actuel : $\exists \omega \; \forall x \; x < \omega$.
- ∗ Infinité de rationnels pour construire un irrationnel.
- ∗ ω est π sont de même nature.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

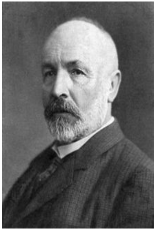


FIGURE: Cantor 1845-1918

- $\ast$ Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
- $\ast$ $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
- $\ast$ Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).
- $\ast$ Introduction de l'arithmétique des ordinaux.
- $\ast$ Infini potentiel : $\forall x \ \exists y \ x < y$.
- $\ast$ Infini actuel : $\exists \omega \ \forall x \ x < \omega$.
- $\ast$ Infinité de rationnels pour construire un irrationnel.
- $\ast$ ω est π sont de même nature.
- $\ast$ $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$ dénombrable.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

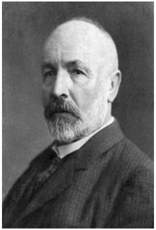


FIGURE: Cantor 1845-1918

* Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
* $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
* Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).
* Introduction de l'arithmétique des ordinaux.
* Infini potentiel : $\forall x\ \exists y\ x < y$.
* Infini actuel : $\exists \omega\ \forall x\ x < \omega$.
* Infinité de rationnels pour construire un irrationnel.
* ω est π sont de même nature.
* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$ dénombrable.
* Intervalles emboîtés **ou** argument diagonale : $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

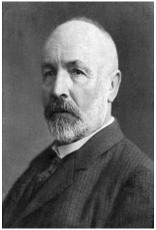


FIGURE: Cantor 1845-1918

* Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
* $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
* Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).
* Introduction de l'arithmétique des ordinaux.
* Infini potentiel : $\forall x \; \exists y \; x < y$.
* Infini actuel : $\exists \omega \; \forall x \; x < \omega$.
* Infinité de rationnels pour construire un irrationnel.
* ω est π sont de même nature.
* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$ dénombrable.
* Intervalles emboîtés **ou** argument diagonale : $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
* Théorème de Cantor $|M| < |\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

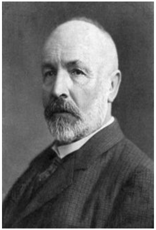


FIGURE: Cantor 1845-1918

- ∗ Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
- ∗ $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
- ∗ Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).
- ∗ Introduction de l'arithmétique des ordinaux.
- ∗ Infini potentiel : $\forall x \; \exists y \; x < y$.
- ∗ Infini actuel : $\exists \omega \; \forall x \; x < \omega$.
- ∗ Infinité de rationnels pour construire un irrationnel.
- ∗ ω est π sont de même nature.
- ∗ $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$ dénombrable.
- ∗ Intervalles emboîtés **ou** argument diagonale : $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
- ∗ Théorème de Cantor $|M| < |\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.
- ∗ $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

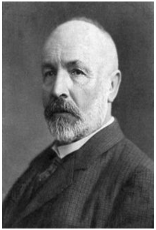


FIGURE: Cantor 1845-1918

- ∗ Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
- ∗ $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
- ∗ Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).
- ∗ Introduction de l'arithmétique des ordinaux.
- ∗ Infini potentiel : $\forall x \ \exists y \ x < y$.
- ∗ Infini actuel : $\exists \omega \ \forall x \ x < \omega$.
- ∗ Infinité de rationnels pour construire un irrationnel.
- ∗ ω est π sont de même nature.
- ∗ $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$ dénombrable.
- ∗ Intervalles emboîtés **ou** argument diagonale : $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
- ∗ Théorème de Cantor $|M| < |\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.
- ∗ $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- ∗ $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

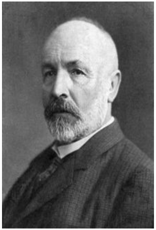


FIGURE: Cantor 1845-1918

* Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
* $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
* Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).
* Introduction de l'arithmétique des ordinaux.
* Infini potentiel : $\forall x\ \exists y\ x < y$.
* Infini actuel : $\exists \omega\ \forall x\ x < \omega$.
* Infinité de rationnels pour construire un irrationnel.
* ω est π sont de même nature.
* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$ dénombrable.
* Intervalles emboîtés **ou** argument diagonale : $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
* Théorème de Cantor $|M| < |\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.
* $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
* $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$.
* $[0,1] \times [0,1]$ équipotent à $[0,1]$.

Cantor : rupture conceptuelle mathématique

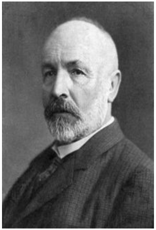


FIGURE: Cantor 1845-1918

- $*$ Construction de $\mathbb{R}$ via les suites de Cauchy.
- $*$ $|M| = |N| \Leftrightarrow M$ et N sont Équipotents.
- $*$ Distinction entre la notion de cardinal et d'ordinal(ω).
- $*$ Introduction de l'arithmétique des ordinaux.
- $*$ Infini potentiel : $\forall x \; \exists y \; x < y$.
- $*$ Infini actuel : $\exists \omega \; \forall x \; x < \omega$.
- $*$ Infinité de rationnels pour construire un irrationnel.
- $*$ ω est π sont de même nature.
- $*$ $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$ dénombrable.
- $*$ Intervalles emboîtés **ou** argument diagonale : $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
- $*$ Théorème de Cantor $|M| < |\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.
- $*$ $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- $*$ $|\mathbb{R}| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$.
- $*$ $[0,1] \times [0,1]$ équipotent à $[0,1]$.
- $*$ Hypothèse du continue $\aleph_1 = \mathbb{R}$.

Cantor : rupture conceptuelle philosophique

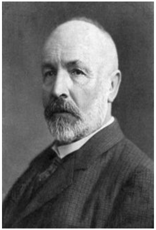


FIGURE: Cantor 1845-1918

$*$ Infini potentiel=infini improprement dit.

Cantor : rupture conceptuelle philosophique

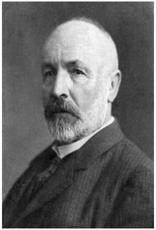


FIGURE: Cantor 1845-1918

* Infini potentiel=infini improprement dit.
* Infini actuel=infini proprement dit.

Cantor : rupture conceptuelle philosophique

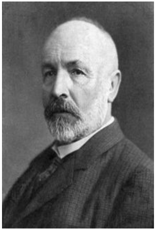


FIGURE: Cantor 1845-1918

- $*$ Infini potentiel=infini improprement dit.
- $*$ Infini actuel=infini proprement dit.
- $*$ Lien entre infini potentiel est infini actuel : métaphore

Cantor : rupture conceptuelle philosophique

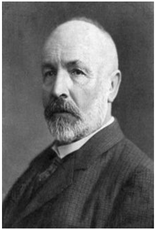


FIGURE: Cantor 1845-1918

"en vérité l'infini potentiel n'a une
réalité sûre que dans la mesure où il fait d'abord référence
à un infini actuel, à travers lequel il devient possible"

Cantor : rupture conceptuelle philosophique

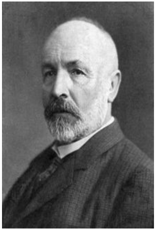


FIGURE: Cantor 1845-1918

∗ Infini potentiel=infini improprement dit.
∗ Infini actuel=infini proprement dit.
∗ Lien entre infini potentiel est infini actuel : métaphore
∗ Critique de Descartes.

Cantor : rupture conceptuelle philosophique

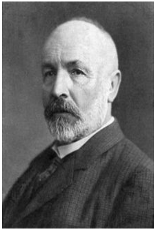


FIGURE: Cantor 1845-1918

∗ Infini potentiel=infini improprement dit.
∗ Infini actuel=infini proprement dit.
∗ Lien entre infini potentiel est infini actuel : métaphore
∗ Critique de Descartes.

Cantor : rupture conceptuelle philosophique

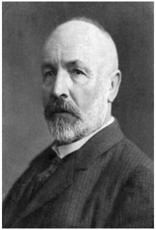


FIGURE: Cantor 1845-1918

"Il se révèle que l'intelligence peut aussi différencier l'infini dans un sens déterminé, c'est-à-dire définir et différencier des nombres au-delà de l'infini ; alors de deux choses l'une, ou bien il faut étendre la signification des mots "intelligence finie" de laquelle on ne pourrait plus tirer aucune conclusion ; ou bien on doit aussi attribuer à l'intelligence humaine le prédicat "infini" en le considérant consciemment, ce qui n'est à mon avis que la seule vérité."

Cantor : rupture conceptuelle philosophique

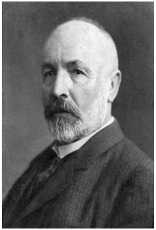


FIGURE: Cantor 1845-1918

∗ Infini potentiel=infini improprement dit.
∗ Infini actuel=infini proprement dit.
∗ Lien entre infini potentiel est infini actuel : métaphore
∗ Différence entre Transfini et Absolu.

Cantor : rupture conceptuelle philosophique

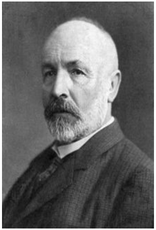


FIGURE: Cantor 1845-1918

"il Lui
a plu que je parvienne aux révélations les plus étonnantes et les plus inattendues dans la théorie des ensembles"

Cantor : rupture conceptuelle philosophique

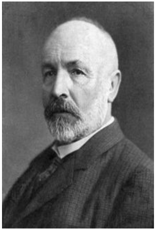


FIGURE: Cantor 1845-1918

* Infini potentiel=infini improprement dit.
* Infini actuel=infini proprement dit.
* Lien entre infini potentiel est infini actuel : métaphore
* Différence entre Transfini et Absolu.
* Dieu est le garant de l'existence des transfinis.

Merci de votre attention.

Bibliographie

- BOURBAKI, N, Éléments d'histoire des mathématiques, Springer 2006.
- CELEYRETTE, J ET BIARD, J, De la théologie aux mathématiques : L'infini au XIVe siècle, Les belles lettres 2005.
- VIDAL, C, Georg Cantor et la découverte des infinis, Mémoire 2003.
- BRUNET, E ; SABT, M ET SUZANNE, A, Le concept d'infini (Historicité, en mathématiques, en sciences).
- BÉRENGER, A, L'infini, Mémoire 2007.