Algèbres de Lie en Physique

Malika Ait Ben Haddou

Department of Mathematics and computer Sciences
Faculty of Sciences, Moulay Ismail University, Meknès, Morocco

Troisième Rencontre de Géométrie, Topologie et Physique Mathématique, Rabat
08 Juin , 2013

Introduction

C'est rare de trouver un étudiant que ce soit en mathématiques ou en physique qui n'a jamais vu des symboles comme $su(2)$ et $su(3)$.

En fait plusieurs d'entre eux ont besoin d'étudier de plus prêt ces symboles, ainsi que les structures liées à ces derniers.

Ces structures connues par Algèbres de Lie sont Omniprésent

- En Physique,
  car Elles sont intimement liées aux symétries qui représntent les principaux thèmes de la physique.
- On mathématiques,
  car on les trouvent dans plusieurs domaines de mathématiques ; analyse harmonique par exemple.

Les symétries sont très connues en science en général et en physique en particulier du fait

- elles sont jolies
- elles ont une grande puissance.
- Les symétries des figures géométriques, des cristaux et de tous les autres objets de la physique macroscopique font l'objet depuis des siecles d'observations et d'etudes.

En physique une symétrie est définie de la manière suivante:
Soit T une transformation efféctuée sur un système physique pour donner un autre système

$$S \longrightarrow S^{'} = T.S$$

T est symétrie si une propriété est conservée dans la transformation.

- Objet globalement identique à lui-même.
- Dynamique(trajectoire) d'un objet matriel
- Hamiltonien d'un système physique.

L'ensemble des T constitue un groupe de symétrie par composition des transformations.

La bonne description des symétries continues des systèmes physiques est en termes d'algèbres de Lie (et leurs groupes de Lie correspondants).

Par exemple les rotations sont décrites par les algèbres de Lie des moments angulaires.

Les algèbres de Lie trouvent leurs applications concrètes dans divers domaines de physique.

- Formulation des symétries des systèmes hamiltoniens en termes d'applicationd de moments.
- La description du spectre atomique, moluculaire et angulaire.
- Les phénomènes d'aberration en optique.
- Les théories de jauges.
- Les théories de gravitation.
- La théorie des supercordes.

Pour les mathématiques, et la physique mathématique les algèbres de Lie ont un lien étroit par exemple avec:

- les algèbres de groupes; les algèbres de Hopf, groupes quantiques, vertex algebras.
- Algèbres de Lie différentielles.
- Les champs de vecteurs d'une variété différentiable.
- La topologie de basse dimension (L'invariance des noeuds obtenue par les groupes quantiques)

On peut citer aussi l'impact des algèbres de Lie sur

- Les solutions de plusieurs equations différentielles qui peuvent être intérprétés en termes d'algèbres de Lie. On cite par exemple la KP et la Kdv Hierarchie (equations de Solitons) qui sont exprimés en fonction d' opérateurs de vertex et certaines représentations d'algèbres de Lie affines (de dimension infinie).
- La classification ADE des singularités.
- La relation des algèbres de Lie et la théorie des nombres, entre autres la théorie des réseaux, les formes automorphes et modulaires

Dans cet exposé on essayera de donner quelques aspects sur L'application des algèbres de Lie en physique. En particulier on donnera des applications d'algèbres de Lie de dimension fine et de dimension infinie

Définitions et propriétés

Nous rappelons ici d'abord les principaux résultaths concernant les algèbres de Lie de dimension finie.

Definition

Une algèbre de Lie g de dimension n sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ muni d'une application bilinéaire $[,] : g \times g \to g$ appelée crochet de Lie, qui possède les propriétés suivantes:

1. $[x, x] = 0 \qquad$ pour tout $x \in g$.
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ pour tout x, y et z dans g .

$[x, x] = 0$ implique que le crochet est une application bilinéaire antisymetrique
c'est-à-dire: pour tout $x, y \in g$, $[x, y] = -[y, x]$.

Les algèbres de Lie semi-simples et st simples de dimension finie sont les algèbres de Lie le plus étudiées pour plusieurs raisons

- La plus part des groupes de Lie et leurs algèbres de Lie associées intéressants sont les semi-simples.
- Les représentation des algèbres de Lie semi-simpless sont bien connues.
- Il y'a une jolie classification des algèbres de Lie semi-simples en termes de leurs systèmes de racines (où encore de leurs matrices de Cartan : diagrammes de Dynkin).

En 1968, les mathématiciens Kac et Moody avaient introduit séparément de nouvelles algèbres $g(A)$, qui portèrent depuis leurs noms. Ces algèbres constituent une généralisation naturelle des algèbres de Lie semi-simples usuelles en dimension infinie.

Strictement parlant, les algèbres KM sont associées avec la donnée des matrices A assez particulières (matrices de Cartan généralisées avec des coefficients qui sont entières) définies comme suit: $A = (a_{ij})_{i,j \in I^2}$ telle que

$$\begin{cases} a_{ij} \in \mathbb{Z} & \forall\,(i,j) \in I^2 \\ a_{ii} = 2 & \forall\, i \in I \\ a_{ij} \leq 0 & \forall i \neq j \\ a_{ij} = 0 & \Leftrightarrow \; a_{ji} = 0 \end{cases}$$

où I est un ensemble fini, non vide

Soit, tout d'abord, une matrice A carrée d'ordre n à coefficients réels $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ vérifiant les propriétés suivantes:
(C_1) A est indécomposable,
(C_2) $a_{ij} \leq 0$ pour $i \neq j$,
(C_3) $a_{ij} = 0$ implique $a_{ij} = 0$.

Remark

1) Une matrice de Cartan généralisée satisfait les conditions (C_2) et (C_3) et on peut supposer qu'elle vérifie (C_1) sans perte de généralité.
2) on peut établir une classification des matrices de Vinberg, c'est à dire des matrices vérifiant (C_1), (C_2) et (C_3) .
Introduisons comme dans Kac, la notation: pour $v \in \mathbb{R}^n$, $v \geqslant 0$ (resp. $v > 0$) si et seulement si toutes ses coordonnées sont positives (resp. strictement positives).

Theorem

Soit A une matrice réelle d'ordre n satisfaisant (C_1), (C_2) et (C_3). Alors A et ${}^TA$ sont simultanément et exclusivement dans les situations suivantes:

(Fin) : $detA \neq 0$; il existe $u > 0$ tel que $Au > 0$;
$Av \geqslant 0$ implique $v > 0$ ou $v = 0$.
A et ${}^TA$ sont alors dites de type fini.

(Aff) : Corang A =1; il existe $u > 0$ tel que $Au = 0$;
$Av \geqslant 0$ implique $Av = 0$
A et ${}^TA$ sont alors dites de type affine.

(Ind) : Il existe $u > 0$ tel que $Au < 0$;
$Av \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ implique $v = 0$
A et ${}^TA$ sont alors dites de type indéfini.

Les matrices de Cartan généralisées de type fini sont simplement les matrices de Cartan indécomposables, donc leur classification est un résultat classique bien connu .
La classification des matrices de Cartan de type affine est obtenue par Kac et Moody en 1968 indépendamment

Applications des algèbres de Lie de dimension finie

A présent on donnera une application en physique théorique des algèbres de Lie. On les trouvent notament dans la modélisation des particules élémentaires :

1. Théorie de jauge
2. Les groupes de symétrie externe de l'espace temps de la relativité restrinte est régis par le groupe de Lie $SO(3)$ et l'algèbre de Lie réelle compacte $so(3)$
3. Les groupes de symétries internes qui gouvernent les interactions sur les particules élémentaires.

On sait qu'il existe deux familles de particules les fermions et les bosons.
O rappelle succinctement quelques propriétés

Fermions	Bosons
Constituent la matière	liés aux intéractions
Spin demi entier	Spin entier

Intéractions élémentaires

La physique a recencé quatre forces fondamentales et cherche à les unifier en leurs groupes de symétrie.
Pour cela l'expériance a mis en evidence des pareticules élémentaires des bosons non massifs de spin 1, pour chacune des forces fondamentales(sauf encore pour la gravitation)

Théorie de l'unification

Deux théories ont étes unifiées dans le modèle standard faible et magnétique et ont donné lieu à un pris Nobel decerné aux physiciens Glashow, Weinberg et Salam. Cette force est alors baptisée **force éléctofaible**.

1. Le groupe de symétrie de l'intéraction faible est $SU(2)$.
   La symétrie dépend de la paryicule.
   Ses éléments sont les bosons W et Z.
2. Le groupe de symétrie lié à l'hypercharge est modelisé par le groupe de Lie $U(1)$ dont on note le boson de jauge B

Posons $H = SU(2) \times U(1)$. Alors H est le groupe de l'interaction éléctrofaible et les relations de commutations de l'algèbre de Lie associée à H qui nous donnent toutes le informations sur cette intéraction.

L'unification de deux intéractions est déja un grand pas, mais ils voulaient également unifier les symétries des particules en un seul groupe de Lie. Ils ont fait une unification partielle des particules grâce l'algèbre de Lie $su(5)$ obtenue par Howard Georgi et Glashow.
Mais malheureusement cette unification a été rejeté par l'expérience.

C'est pourquoi les physiciens ont ont chérché d'autres algèbres dans lesaquelles on pourrait unifier toute génération de particules.
Howard Georgi a alors pensé à $so(10)$ qui possède une représentation de dimension 16.
Les différentes unifications dépendent du degré des particules. et on utilise alors le fait

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \subset SU(5) \subset SO(10)$$

Applications des algèbres de Lie de dimension infinie

Le groupe $Diff(S^1)$ des difféomorphismes du cercle peut être vu comme un groupe de Lie de dimension unfinie dont l'algèbre de Lie de dimension infinie s'identifie à $Vect(S^1)$ appelés groupe et algèbre de Virasoro.
On peut les considerer commme un bon d'essai pour l'elaboration d'une géométrie de dimension infinie, symplectique principalement, mais aussi complexe et riemannienne.

Ce sont les applications en physique qui ont fait le plus pour la célébrité de l'algèbre de virasoro.
Lorsqu'on quitte la mécanique pour la thérie des champs, le nombre de degrés de libérté devient infini, et il faut donc considérer des groupes de de dimension infinie si on veut continuer à utiliser le formalisme des groupes de symétrie comme pourvoyeur de quantités consérvée.

L'algèbre de Virasoro est apparue:

- La théorie des modèles conservés , puis
- La physique statistique
- en théorie des cordes et des champs conformes.
  Elle constitie l'outil principal de la physique des hautes energies.

Pour les physiciens théoriciens, l'étude des représentations unitaires des algèbres KM constituent un outil fondamental pour la construction de modèles physiques quasi-rálistes du monde microscopique. Elles sont aussi intéressantes dans la recherche de symètriques inédites de la nature.
Comme son nom l'indique, le secteur indéfini des algèbres KM est un champ encore vierge; il est donc condidat par excellence pour la recherche de nouvelles symétries.

(A. Belhaj, E. Saidi, M Ait Ben Haddou)
Armé par l'arsenal de la théoré des algèbres KM et leurs classifications nous avous montré l'existence de trois classes des théories conformes supersymétriques à quatre dimension (CFT4) que nous résumons dans le théorème suivant:

Theorem

Il existe trois principales classes de singularités pour les variétés de Calabi-Yau threefolds $(CY3)$. *Ces géométries sont en correspondance* $1:1$, *d'une part avec les trois secteurs des algèbres de Kac-Moody décrits par le théorème de Vinberg, et d'autre part avec les* $\mathcal{N}=2$ QFT_4 *résultant de la compactification de la supercorde type* IIB.