Classification des espaces elliptiques de dimensions cohomologiques 9

Jawad Tarik (Doctorant dans l'équipe "Topologie algébrique et applications")

Laboratoire "TAGESUD", Faculté des Sciences Ain Chock, Casablanca, Maroc.
Join work with M.R. Hilali and M.I. Mamouni

Résumé

Dans ce travail, on va classifier les types d'homotopie rationnelle des espaces X elliptiques, simplement connexes pour lesquelles la somme des nombres de Betti est égale à 9. La dimension de cohomologie étant impaire, et donc leurs invariants cohomologiques d'Euler-Poincaré sont strictement positifs. Il en découle que ces espaces sont purs et par suite, sont formels.
A savoir, un espace est dit formel s'il admet le même modèle que sa cohomologie. Autrement dit, l'homotopie de l'espace est lue à partir de sa cohomologie rationnelle.
La conjecture $\mathcal{H}$ [4] a joué un rôle très important dans cette classification, puisqu'elle est vraie dans le cas formel. [5]

Homotopie rationelle : Introduction

Rationalisation et type d'homotopie rationnelle :
$\widetilde{H}_*$ denote l'homologie réduite.
Définition :
Un espace X simplement connexe est dit rationnel s'il satisfait les conditions équivalentes suivantes :
(a) $\pi_*(X)$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel.
(b) $\widetilde{H}_*(X;\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel.
(c) $\widetilde{H}_*(\Omega X;\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel.
Définition :
Soit X un espace simplement connexe.
On dit qu'une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est une rationalisation de X si Y est simplement connexe et rationnel, et that l'application $\pi_*(f)\otimes\mathbb{Q} :\ \pi_*(X)\otimes\mathbb{Q} \longrightarrow \pi_*(Y)\otimes\mathbb{Q} \cong \pi_*(Y)$ est un isomorphisme.
On remarque que f est une rationalisation ssi $H_*(f;\mathbb{Q})$ est un isomorphisme.
Théorème :
Soit X un espace simplement connexe. Il existe un $CW-$complexe relatif (X_0, X) ne possèdant ni $0-$cellules ni $1-$cellules tel que l'inclusion $j : X \longrightarrow X_0$ est une rationalisation. Par ailleurs, si Y est simplement connexe et rationnel, alors toute application continue $f : X \longrightarrow Y$ s'étend à X_0. Autrement dit, il existe une application continue $g : X_0 \longrightarrow Y$ unique à homotopie près, telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j"'] & & Y \\ & X_0 \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Etant donné une application $\varphi : X \longrightarrow Y$ entre espaces simplement connexes, soit $\varphi_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ l'application induite entre leurs rationalisés. L'existence et l'unicité (à homotopie près) sont assurées par le théorème précédent.

Homotopie rationnelle : Définitions et notations

Définition : Le type d'homotopie rationnelle d'un espace X simplement connexe est le type d'homotopie faible de son rationalisé X_0.

Définition : Une application continue $\varphi : X \longrightarrow Y$ entre espaces simplement connexes est une équivalence d'homotopie rationnelle si elle satisfait aux conditions équivalentes suivantes :
(a) $\pi_*(\varphi)\otimes\mathbb{Q}$ est un isomorphisme.
(b) $H_*(\varphi;\mathbb{Q})$ est un isomorphisme.
(c) $H^*(\varphi;\mathbb{Q})$ est un isomorphisme.
(d) $\varphi_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ est une équivalence d'homotopie faible.

Proposition : Pour tout espace X simplement connexe, il existe un $CW-$complexe Z et une équivalence d'homotopie rationnelle $\varphi : Z \longrightarrow X$ tels que :
(1) $H_*(X;\mathbb{Q})$ est de type fini ssi Z est de type fini, et
(2) Si $\dim_{\mathbb{Q}} H_*(X;\mathbb{Q}) \prec \infty$, alors $H_*(X;\mathbb{Q}) = H_{\leq N}(X;\mathbb{Q})$ ssi Z est fini de dimension au plus N.

Définition : Un espace X simplement connexe est de type rationnel fini si la condition (1) de la proposition précédente est satisfaite.

Définition : Un modèle rationnel cellulaire d'un espace X simplement connexe, est la donnée d'une équivalence d'homotopie rationnelle $X \longrightarrow Y$ où Y est un $CW-$complexe vérifiant $Y^0 = Y^1 = *$.
On dit que X est rationnellement modélisé par Y.

Théorème : Soit un espace X simplement connexe tel que $H^*(X;\mathbb{Q}) = \bigoplus_{k=0}^{n} H^k(X;\mathbb{Q})$. Alors X est rationnellement modélisé par un $CW-$complexe Y de dimension n.

Espaces vectoriels gradués :
Définition : Un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel gradué est la donnée d'une famille $V = \left\{V^i\right\}_{i\geq 0}$ de $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels. Les éléments $v \in V^i$ sont dits de degrés i, et on écrit $\deg v = i$ ou bien $|v| = i$ pour tout $v \in V^i$. Un espace vectoriel gradué V est concentré en degré $i \in I$ $(I \subset \mathbb{N})$ *si* $V^i = 0$ pour tout $i \notin I$, on écrit alors $V = \left\{V^i\right\}_{i\in I}$. Un espace vectoriel gradué V est dit de type fini si pour tout i, $\dim V^i \prec \infty$. On dit qu'il est de dimension finie si pour tout i, $\dim V^i \prec \infty$ *et* $V^i = 0$ sauf pour un nombre fini de i.
Notations : • $V^+ := \bigoplus_{i\geq 1} V^i$ *et* $V^{\geq n} := \bigoplus_{i\geq n} V^i$.
• $V^{pair} := \bigoplus_{i\geq 0} V^{2i}$ *et* $V^{impair} := \bigoplus_{i\geq 0} V^{2i+1}$.
Exemples : (i) Le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est un espace vectoriel gradué concentré en degré 0.
(ii) $H_n(X;\mathbb{Q})$ est une suite de $\mathbb{Q}-$espaces vectoriels et donc c'est un espace vectoriel gradué.
Remarque : Il est important de noter que les espaces vectoriels gradués manquent certaines propriétés supplémentaires au niveau structure +graduation. Par exemple, étant donné un espace vectoriel gradué V, la somme d'un élément de V^i avec un de V^j *si* $i \neq j$ n'est pas définie. Il existe une alternative où on considère cet espace comme somme directe $V = \bigoplus V^i$, et donc la somme ici est formellement définie. C'est pourquoi les éléments de V^i sont dits homogènes de degré i, en contraste avec la somme formelle d'éléments de degrés différents.
Quelques constructions : (i) Un sous-espace d'un espace vectoriel gradué $U \subset V$ est un espace vectoriel gradué $\left\{U^i\right\}_{i\geq 0}$ tel que U^i est un sous-espace de V^i pour tout $i \geq 0$.
(ii) Etant donné U un sous-espace d'un espace vectoriel gradué V, le quotient de V par U est l'espace vectoriel gradué $V\ U = \{V_i\ U_i\}_{i\geq 0}$.
(iii) Soient V et W deux espaces vectoriels gradués, la somme directe de V et W est l'espace vectoriel gradué $V \oplus W = \left\{V^i \oplus W^i\right\}_{i\geq 0}$.
(iv) Soient V et W deux espaces vectoriels gradués, le produit tensoriel de V et W est l'espace vectoriel gradué $V \otimes W = \left\{\bigoplus_{j+k=i} V^j \otimes W^k\right\}_{i\geq 0}$. En particulier, un élément $v\otimes w \in V^j \otimes W^k$ est de degré $|v \otimes w| = j + k$.
Définition : Une application linéaire de $f : V \longrightarrow W$ degré n, est une famille d'applications linéaires $f_i : V^i \longrightarrow W^{i+n}$ pour tout $i \geq 0$.
Définition : Une différentielle sur un espace vectoriel gradué V est une application linéaire $d : V \longrightarrow V$ de degré 1 telle que $d_{n+1}\circ d_n = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Modéle Minimal de Sullivan

Algèbre différentielle graduée commutative : (adgc)

Définition : Une algèbre différentielle graduée est une algèbre A graduée en tant qu'espace vectoriel muni d'une différentielle d vérifiant la relation suivante appelée formule de Leibniz :

$$d(x.y) = (dx).y + (-1)^{|x|} x.dy \quad \forall x, y \in A$$

Définition : Une algèbre différentielle graduée commutative (A, d) est une algèbre différentielle graduée vérifiant :

$$x.y = (-1)^{|x||y|} y.x$$

En particulier, on a : $*\ y^2 = 0,\ si\ |y|\ impair.$
$*\ x.y = y.x,\ si\ |x|\ pair.$

Algèbre graduée commutative libre : Soit V un espace vectoriel gradué. L'algèbre tensorielle TV est l'espace vectoriel gradué défini par :

$$TV = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^kV \ où\ T^0V = \mathbb{Q},\ T^kV = \underbrace{V\otimes ...\otimes V}_{k\ fois}\ \ k \geq 1$$

On voit que TV est une algèbre graduée.
La multiplication est définie comme suit : *si* $x \in T^kV$ *et* $y \in T^lV$, *alors* $xy = x \otimes y \in T^{k+l}V$. L'identité est $1 \in T^0V$, les éléments de T^kV sont dits de longueur k.
On considère l'idéal $I \subset TV$ engendré par les éléments de la forme $x\otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x$ pour tous $x, y \in V$.

Définition : Le quotient $\Lambda V = TV/I$ est une algèbre graduée commutative, appelée l' algèbre graduée commutative libre sur V.
Λ^kV denote l'image de la projection naturelle $T^kV \longrightarrow \Lambda V$. Les éléments de Λ^kV sont dits de longueur k.

Proposition : Soit V un espace vectoriel gradué et A une algèbre graduée commutative.
(i) Toute application linéaire $V \longrightarrow V$ de degré k s'étend à une unique dérivation $\Lambda V \longrightarrow \Lambda V$ de degré k.
(ii) Toute application linéaire $V \longrightarrow A$ de degré 0 s'étend à un unique morphisme d'algèbres graduées commutatives $\Lambda V \longrightarrow A$.
Remarques : (i) Λ^kV désigne les éléments de longeur k, et $(\Lambda V)^k$ désigne les éléments de ΛV de degré k.
(ii) Si $\{v_1, v_2, ...\}$ est une base de V, on note souvent $\Lambda(v_1, v_2, ...)$ au lieu de ΛV.
(iii) Soient V et W des espaces vectoriels gradués, alors il existe un isomorphisme canonique d'algèbres graduées commutatives :

$$\Lambda(V \oplus W) \cong \Lambda V \otimes \Lambda W.$$

(iv) $\Lambda V \cong Sym\left(V^{pair}\right) \otimes Ext\left(V^{impair}\right)$, où $Sym\left(V^{pair}\right)$ désigne l'algèbre symétrique engendrée par V^{pair} et $Ext\left(V^{impair}\right)$ désigne l'algèbre extérieure engendrée par V^{impair}.
Modèles de Sullivan : Maintenant, nous introduisons un des concepts les plus importants dans la théorie d'homotopie rationnelle, la notion d'une algèbre de Sullivan (ou modèle de Sullivan), noté $(\Lambda V, d)$. Fondamentalement, les algèbres de Sullivan sont les modèles minimaux des adgc, dans le sens où toutes les informations d'homotopie dans une adgc peuvent être encodées dans une algèbre de Sullivan correspondante (unique à isomorphisme près). Autrement dit, les modèles minimaux de Sullivan permettent d'identifier le type d'homotopie rationnelle de tout espace topologique X simplement connexe, au type d'homotopie d'une algèbre différentielle graduée commutative. Voir la construction du modèle de Sullivan dans [1].
Définitions : $\star$ Une algèbre de Sullivan est une adgc $(\Lambda V, d)$ telle que :
(i) $V = \{V^p\}_{p\geq 1}$.
(ii) $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V(k)$, *où* $V(0) \subset V(1) \subset .....$ est une suite croissante de sous-espaces gradués tels que :

$$d/V(0) = 0\ et\ d : V(k) \longrightarrow \Lambda V(k-1),\ k \geq 1.$$

$\star$ Une algèbre de Sullivan est dite minimale *si* $dV \subset \Lambda^{\geq 2}V$.

Classification

Théorème : Si $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) = 9$, alors X est formel à l'un des types suivants :
(1) $Y_1/\ H^*(Y_1;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/\left(a^3+\lambda ab^2, a^3+\lambda' b^3\right)$ *avec* $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Q}^*$.
(2) $Y_2/\ H^*(Y_2;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/\left(a^3+\lambda b^3, a^2b\right)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{Q}^*$.
(3) $Y_3/\ H^*(Y_3;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/\left(a^3+\lambda b^3, a^2b+\lambda' ab^2\right)$ *avec* $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Q}^*$.
(4) $Y_4/\ H^*(Y_4;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/\left(a^3+\lambda b^3, a^3+\lambda' a^2b\right)$ *avec* $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Q}^*$.
(5) $Y_5/\ H^*(Y_5;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/\left(a^3+\lambda b^3, a^2b+\lambda' ab^2+\lambda'' a^3\right)$ *avec* $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \mathbb{Q}^*$.
(6) $R_1/\ H^*(R_1;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/\left(a^3+\lambda ab, b^3\right)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{Q}^*$.
(7) $R_2/\ H^*(R_2;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/\left(a^3+\lambda ab, b^3+\lambda' a^2b^2\right)$ *avec* $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Q}^*$.
(8) $\mathbb{S}^n_{(3)}\sharp\mathbb{S}^m_{(6)}$, *où* $3n = 6m = fd(X)$.
(9) $R_3/\ H^*(R_3;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/\left(a^3+\lambda ab, b^3+\lambda' a^6\right)$ *avec* $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Q}^*$.
(10) $R_4/\ H^*(R_4;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/\left(a^3, b^3+\lambda a^2b^2\right)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{Q}^*$.
(11) $\mathbb{S}^{2n}_{(2)} \times \mathbb{S}^{2(n+p)}_{(2)}$.
(12) $\mathbb{S}^n_{(8)}$ *avec* $8n = fd(X)$.
(13) $\mathbb{S}^n_{(2)}\sharp\mathbb{S}^m_{(7)}$, *où* $2n = 7m = fd(X)$.
(14) $R_5/\ H^*(R_5;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/\left(a^2b, a^5-b^2\right)$.
(15) $R_6/\ H^*(R_6;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/\left(a^3b, a^3-b^2\right)$.
(16) $\mathbb{S}^n_{(4)}\sharp\mathbb{S}^m_{(5)}$, *où* $4n = 5m = fd(X)$.
(17) $R_7/\ H^*(R_7;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b,c]/\left(ab, ac+\lambda b^2, a^3+\lambda' c^2\right)$ *avec* $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Q}^*$.

Bibliograhie : [1] Y. Félix, S. Halperin et J. C. Thomas, Rational homotopy theory, Graduate texts in Math. Vol. 205 (2001), Springer-Verlag, New York.
[3] Halperin, S. Finitness in the minimal models of Sullivan, T.A.M.S. 230 (1977) 173-199.