Sur un procédé pour la percolation à une dimension dans le cas des plus proches voisins

Benaissa Fadila

Université des sciences et de la technologie Mohamed Boudiaf, Oran, Algérie.

Introduction

La percolation est un phénomène de seuil associé à la transmission d'une information par le biais d'un réseau de sites et de liens qui peuvent selon leur état transmettre ou non l'information aux sites voisins. Ce phénomène a été modélisé pour la première fois en 1957 par Hammersley qui cherchait à comprendre comment les masques à gaz des soldats devenaient inéfficaces. Le terme percolation vient du phénomène similaire qui est le passage non plus d'un gaz mais de l'eau à travers le percolateur de la machine à café qui est un filtre au même titre que le masque à gaz.(Dans ce cas l'information est le fluide, eau ou gaz et les sites sont les pores du filtre qui relayent l'inforamtion s'ils ne sont pas bouchés). Le mot percolation vient du latin percolatio qui veut dire filtration.

La percolation s'applique dans de nombreux domaines comme la chimie, la biologie, la physique nucléaire, l'écologie,la pédologie, l'économie, et l'épidémiologie

En Mathématique :Le modèle de percolation est un modèle probabiliste de la physique statistique.On définit l'amas d'un sommet x comme étant l'ensemble C(x) de tout les sommets qui sont connectés à x par une chaîne ouverte. La percolation repose sur l'étude probabiliste d'apparition d'un amas infini.
Dans ce travail nous essayons de construire un algorithme qui permetterait de dire qu'il n'y a pas percolation, on examinera cette dernière dans le cas des plus proches voisins. A la fin de notre raisonnement on obtiendra une suite d'intervalles possédant une certaine propriété qui forment un recouvrement pour la droite $\mathbb{Z}$.

Lois de probabilité des variables aléatoires définies pour renouveler le processus de l'apparition des liens

Prenons l'origine de la droite $\mathbb{Z}$. Soit q la probabilité qu'un lien soit occupé.
Regardons à droite de zéro ; Soit $n^d_{i,i+1}$ la variable aléatoire définie par :

$$n^d_{i,i+1} = \begin{cases} 0 & \text{si le lien (i,i+1) est vacant} \\ 1 & \text{si le lien (i,i+1) est occupé} \end{cases}$$

Soit T_1 la première fois qu'on rencontre un lien vacant à droite de zéro.

$$T_1 = inf\{i \geq 0, n^d_{i,i+1} = 0\}$$

T_1 suit une loi géométrique de paramètre q :

$$\mathbb{P}[T_1 = k] = (1-q)^k q \text{ avec } k = 0, 1, 2, ...$$

$$\mathbb{P}[T_1 \geq n] = (1-q)^n \text{ avec } n = 0, 1, 2, ...$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}[T_1 \geq n] = 0$$

$$E(T_1) = \frac{1-q}{q}$$

Regardons à gauche de zéro ; Soit $n^g_{i,i+1}$ la variable aléatoire définie par :

$$n^g_{i,i+1} = \begin{cases} 0 & \text{si le lien (i,i+1) est vacant} \\ 1 & \text{si le lien (i,i+1) est occupé} \end{cases}$$

Soit T_{-1} la première fois qu'on rencontre un lien vacant à gauche de zéro.

$$T_{-1} = \sup\{i \leq -1, n^g_{i,i+1} = 0\} = inf\{-i, i \leq -1, n^g_{i,i+1} = 0\}$$

T_{-1} suit une loi géométrique de paramètre q :

$$\mathbb{P}[T_{-1} = k] = (1-q)^{k-1} q \text{ avec } k = 1, 2, ...$$

$$\mathbb{P}[T_{-1} \geq n] = (1-q)^{n-1} \text{ avec } n = 1, 2, ...$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}[T_{-1} \geq n] = 0$$

$$E(T_{-1}) = \frac{1}{q}$$

les valeurs de T_1 varie de un à l'infini, par contre celles de T_{-1} varie de zéro à l'infini. Soit T la première fois qu'on rencontre un lien vacant à droite de zéro et un lien vacant à gauche de zéro.

$$T = T_1 + T_{-1}$$

$$\mathbb{P}[T = k] = (1-q)^{k-1} q^2 k \text{ avec } k = 1, 2, ...$$

$$\mathbb{P}[T \geq n] = n(1-q)^{n-1} q + (1-q)^n \text{ avec } n = 1, 2, ...$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}[T \geq n] = 0$$

$$E(T_{-1}) = \frac{2-q}{q}$$

Distributions des tailles des clusters pour la percolation en dimensions 1

Soit $\mathcal{C}_0$ le cluster contenant zéro.

$$\mathbb{P}[|\mathcal{C}_0| = n] = (1-q)^n q^2 (n+1) \text{ avec } n = 0, 1, 2, ...$$

$$\mathbb{P}[|\mathcal{C}_0| \geq k] = (k+1)(1-q)^k q + (1-q)^{k+1} \text{ avec } k = 0, 1, 2, ...$$

$$E(|\mathcal{C}_0|) = \frac{2q(1-q) + 2(1-q)^2}{q}$$

Soit U_1 la première fois qu'on rencontre un lien occupé aprés T_1.

$$U_1 = \inf\{i \geq T_1 + 1, n_{i,i+1} = 1\}$$

Soit $\mathcal{D}_1$ la première série de liens vacants à droite de zéro.

$$\mathbb{P}[|\mathcal{D}_1| = k] = q^{k-1}(1-q) \text{ avec } k = 1, 2, ...$$

$$\mathbb{P}[|\mathcal{D}_1| \geq n] = q^{n-1} \text{ avec } n = 1, 2, ...$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}[|\mathcal{D}_1| \geq n] = 0$$

$$E(|\mathcal{D}_1|) = \frac{1}{1-q}$$

Soit T_2 la première fois qu'on rencontre un lien vacant aprés U_1.

$$T_2 = \inf\{i \geq U_1 + 1, n^d_{i,i+1} = 0\}$$

Soit $\mathcal{C}_1$ premier cluster à droite de zéro, ne contenant pas zéro.

$$\mathbb{P}[|\mathcal{C}_1| = k] = (1-q)^{k-1} q \text{ avec } k = 1, 2, ...$$

$$\mathbb{P}[|\mathcal{C}_1| \geq n] = (1-q)^{n-1} \text{ avec } n = 1, 2, ...$$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}[|\mathcal{C}_1| \geq n] = 0$$

$$E(|\mathcal{C}_1|) = \frac{1}{q}$$

On montre facilement que tout les $\mathcal{C}_i$ suivent une loi géométrique de même paramètre, que tous les $\mathcal{D}_i$ suivent la même loi géométrique et que $\forall$ i, $E(|\mathcal{D}_i|) = E(|\mathcal{D}_1|)$ et $E(|\mathcal{C}_i|) = E(|\mathcal{C}_1|)$.
Si $q = \frac{1}{2}$ on a : $E(|\mathcal{D}_1|) = E(|\mathcal{C}_1|)$.
$q > \frac{1}{2}$ on a : $E(|\mathcal{D}_1|) > E(|\mathcal{C}_1|)$.
$q < \frac{1}{2}$ on a : $E(|\mathcal{D}_1|) < E(|\mathcal{C}_1|)$.

D'aprés la loi des grands nombres on a :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |\mathcal{C}_i| \to E(|\mathcal{C}_1|)$$

On remarque que les $\mathcal{C}_i$ forment une suite d'intervalles non connectés à leurs extérieurs, on les appelent des intervalles dissociés.

Recouvrement de la droite $\mathbb{Z}$

Prenons deux clusters $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_{i+1}$ par exemple $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$, examinons si on peut les reliers par des liens de longueur deux pour former un recouvrement de la droite $\mathbb{Z}$

$$n_{i,i+2} = \begin{cases} 0 & \text{si le lien (i,i+2) est vacant} \\ 1 & \text{si le lien (i,i+2) est occupé} \end{cases}$$

Soit $q_2 = \mathbb{P}[n_{2k,2k+2} = 0]$ et $q_2^{'} = \mathbb{P}[n_{2k-1,2k+1} = 0]$.
On montre
Si $|\mathcal{D}_1| = n = 2k$, $\mathbb{P}[T_1$ non effectif $] = p_2^{\frac{n}{2}} + p_2^{'\frac{n}{2}+1} - p_2^{\frac{n}{2}} . p_2^{'\frac{n}{2}+1}$
Si $|\mathcal{D}_1| = n = 2k+1$, $\mathbb{P}[T_1$ non effectif$] = p_2^{\frac{n+1}{2}} + p_2^{'\frac{n+1}{2}+1} p_2^{\frac{n+1}{2}} . p_2^{'\frac{n+1}{2}+1}$
Avec $p_2 = 1 - q_2$ et $p_2^{'} = 1 - q_2^{'}$
On dit que T_i est effectif s'il arrête la percolation.
On remarque que les $\mathcal{C}_i$ forment une suite d'intervalles non connectés à leurs extérieurs, on les appelent des intervalles dissociés.

Références

[1] Geoffry Grimmett. *Percolation.* second edition 1999.

[2] Harry kesten Percolation Theory for Mathematicians. *Progress in Probability and Statistics Vol.2*, 1982.

[3] A. B Khanikaev, A. B. Granovski, and J. P. Clerk Influence of the Size Distribution of Granules and of Their Attractive Interaction on the Percolation Threshold in Granulated Alloys. *Physics of the solide State. vol.44,N0.9*, 2002.

.

.