Sur la fonctorialité de l'homologie de Khovanov

Christian Blanchet
IMJ, Université Paris-Diderot

Rabat 2 juin 2012

Homologie de Khovanov

- Théorème [Khovanov] :
  1. Pour chaque diagramme d'entrelacs D, il existe un complexe bigradué $K(D)$.
  2. Pour chaque mouvement de Reidemeister $D \leftrightarrow D'$ il existe une équivalence d'homotopie $K(D) \rightarrow K(D')$.
  3. La caractéristique d'Euler graduée est égale au polynôme de Jones.
- Bar-Natan : jolie construction topologique (TQFT pour les surfaces).

Sur la fonctorialité

- Action des cobordismes plongés sur l'homologie de Khovanov ?
- Jacobson, Khovanov, Bar-Natan : un cobordisme induit un homomorphisme en homologie bien défini au signe près (fonctorialité projective).
- Clark-Morrison-Walker, Carmen Caprau : variante *strictement fonctorielle* avec coefficients $\mathbb{Z}[i]$.
- B : variante *strictement fonctorielle* avec coefficients entiers.

Sur la fonctorialité, suite

- Est-ce que l'isomorphisme associé à une suite de mouvements de Reidemeister est canonique ?
- Jacobson : réponse négative ; il peut y avoir de la *monodromie*.
- B : Pour un entrelacs fixé, deux projections génériques produisent des homologies canoniquement isomorphes.

Applications de l'homologie de Khovanov et questions

- Rasmussen : nouvelle preuve de la conjecture de Milnor sur le genre en dimension 4 (slice genus) des noeuds toriques.
- Grigsby-Wehrli , Hedden : l'homologie de Khovanov du cablage à deux brins détermine le noeud trivial (lien avec l'homologie de Heegaard-Floer du revêtement ramifié double).
- Est-ce le cas pour l'homologie de Khovanov ?
- Information sur le genre ?
- Fidélité de la *représentation* de tresses (action par foncteurs) ?

TQFT pour les surfaces

- Une TQFT en dimension 2 est un foncteur :

$$\text{courbe } \Gamma \;\mapsto\; \text{module } \mathbf{V}(\Gamma)\ .$$

$$\text{cobordisme } \Sigma \;\mapsto\; \text{application linéaire } \mathbf{V}(\Sigma)\ .$$

- Les TQFTs en dimension 2 sont en correspondance avec les algèbres de Frobenius commutatives (algèbres symétriques).
- Extension du foncteur TQFT : la surface peut avoir des points marqués par un élément de l'algèbre de Frobenius.

Quelques algèbres de Frobenius

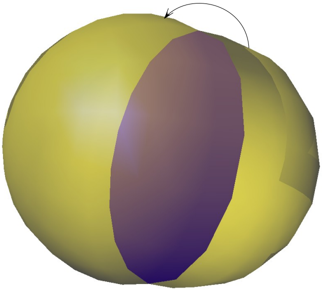
- Cohomologie des variétés de drapeaux :
  $A = H^*(\mathbb{C}P^{N-1})$,
  $B = H^*(G_2(\mathbb{C}^N))$ (grassmanienne des plans dans $\mathbb{C}^N$),
  $C = H^*(G_{1,2}(\mathbb{C}^N))$ (drapeaux (droites $\subset$ plan) dans $\mathbb{C}^N$).
  $D = H^*(G_{1,2,3}(\mathbb{C}^N))$ ...
- Morphismes d'algèbre :

$$\alpha : A \otimes A \to C \quad , \quad \beta : B \to C \ .$$

La catégorie trivalente

- Les objects sont des graphes trivalents orientés avec flot égal à 1 ou 2 sur les arêtes.
- Les morphismes clos sont des 2-complexes,
  les faces régulières sont orientées et étiquetées 1 ou 2,
  le lieu singulier est une courbe (reliure) dont chaque composante est le produit du cercle avec un sommet trivalent,
  i.e. il y a 2 pages étiquetées 1 induisant la même orientation et une page étiquetée 2 induisant l'orientation contraire.
- Sur chaque sommet trivalent (resp. chaque composante de la reliure), on fixe un ordre sur les 2 germes d'arêtes (resp. les 2 pages) étiquetées 1. Pour un graphe planaire : convention.
- Les cobordismes sont obtenus en coupant génériquement.
- Les faces peuvent avoir des points marqués avec des éléments d'une algèbre de Frobenius A pour les 1-faces, et d'une algèbre de Frobenius B pour les 2-faces.

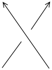
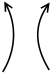
Une surface trivalente

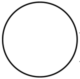


TQFT trivalente : considérations générales

- En bref, un foncteur monoidal $\mathbf{V}$ sur la catégorie trivalente :
  Graphe trivalent $G \mapsto$ module $\mathbf{V}(G)$,
  cobordisme $\Sigma \mapsto$ module $\mathbf{V}(\Sigma)$
  composition, multiplicativité pour les unions disjointes.
- Linéarisation : module engendré par toutes les surfaces trivalentes de bord G, quotienté par des relations.
- La construction universelle : les relations proviennent d'un invariant des surfaces trivalentes closes (sans bord).

Invariant $sl(N)$ des entrelacs

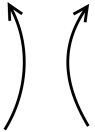
$q^N \; P_N($  $) \; - \; q^{-N} \; P_N($  $) \; = \; (q - q^{-1}) \; P_N($  $)$

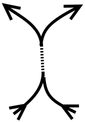
$P_N($  $) \; = \; [N] \; = \; \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}$

Polynôme de Jones : $N = 2$

Modèle d'état $sl(N)$, formule globale

- Un état s d'un diagramme d'entrelacs D associe à un croisement positif (resp. negatif) 0 ou 1 (resp. -1 ou 0).
- D_s est un graphe planaire trivalent, défini par :

si $s(c) = 0$, alors c est remplacé par : 

si $|s(c)| = 1$, alors c est remplacé par : 

- $P_N(D) = \sum_s (-1)^{s(D)} q^{(1-N)w(D)-s(D)} P_N(D_s)$,

  $s(D) = \sum_c s(c)$, $w(D) = \sum_c \mathrm{sign}(c)$
  $P_N(D_s) \in \mathbb{Z}_+[q^{\pm 1}]$, $P_2(D_s) = (q + q^{-1})^{\sharp D_s^1}$,
  D_s^1 est le sous-graphe obtenu en enlevant les arêtes de flot 2.

Construction d'un complexe

- Soit **V** un foncteur sur la catégorie trivalente

$$\begin{aligned} &\text{graphe trivalent} \quad G \mapsto \text{module } \mathbf{V}(G) \ , \\ &\text{cobordisme} \quad \Sigma \mapsto \text{application linéaire} \quad \mathbf{V}(\Sigma) \ . \end{aligned}$$

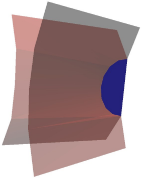
- $$\mathrm{K}(D) = \bigoplus_{s} \mathbf{V}(D_s)$$

- Le degré cohomologique est : $s(D) = \sum_c s(c)$.

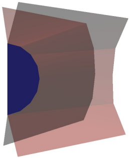
Définition du bord : 1ère tentative

- L'opérateur bord entre les blocs $\mathbf{V}(D_s)$ et $\mathbf{V}(D_{s'})$ est nul sauf si s et s' sont differents en un seul croisement c, où $s'(c) = s(c) + 1$.
- Dans ce cas pour un croisement positif (resp. négatif) c'est l'application linéaire $\mathbf{V}(\Sigma)$, (resp. $\mathbf{V}(\Sigma')$) où Σ (resp. Σ') est l'identité en dehors d'un voisinage du croisement et est une selle avec membrane autour du croisement :

Σ :



Σ' :



Obtient-on un complexe ?

- Par fonctorialité de **V**, les carrés commutent.
- $(\mathrm{K}(D) \otimes \mathbb{Z}/2, \partial)$ est un complexe de chaîne.

Complexe sur $\mathbb{Z}$

- Soit Δ_s le groupe abélien libre de rang $d_s = \sum_c |s(c)|$ engendré par les croisements c avec $|s(c)| = 1$ (ou les arêtes doubles de D_s), muni de la forme bilinéaire standard.

$$K(D) = \bigoplus_s \mathbf{V}(D_s) \otimes \wedge^{d_s} \Delta_s$$

- Pour un croisement positif c :

$$\delta = \mathbf{V}(\Sigma) \otimes (\bullet \wedge c) : \mathbf{V}(D_s) \otimes \wedge^{d_s} \Delta_s \to \mathbf{V}(D_{s'}) \otimes \wedge^{d_{s'}} \Delta_{s'}$$

- Pour un croisement négatif c,

$$\delta = \mathbf{V}(\Sigma') \otimes < \bullet, c >: \mathbf{V}(D_s) \otimes \wedge^{d_s} \Delta_s \to \mathbf{V}(D_{s'}) \otimes \wedge^{d_{s'}} \Delta_{s'}$$

$< \bullet, c >$ est (l'antisymétrisation de) la contraction.

- $(K(D), \delta)$ est un complexe de chaîne.

Résultats

- Il existe une famille V_N, $N \geq 2$, de foncteurs gradués sur la catégorie trivalente pour lesquels l'homologie du complexe associé à un diagramme est un invariant [1] de l'entrelacs qui catégorifie l'invariant $sl(N)$.
- L'invariant s'étend fonctoriellement aux cobordismes plongés.
- Catégorification similaire de l'invariant $sl(N)$ via une formule de Kapustin-Li.
- Première catégorification de l'invariant $sl(N)$: Khovanov-Rozansky.

1. au sens fort : l'isomorphisme associé à un mouvement de Reidemeister est canonique