

De l'étude de Gauss de l'électromagnétisme aux invariants perturbatifs des nœuds

Christine Lescop

CNRS, Institut Fourier, Grenoble

Deuxième rencontre : Géométrie, Topologie et Physique Mathématique



Université Internationale de Rabat
2-3 juin 2012

Les nœuds de $\mathbb{R}^3$ sont des plongements du cercle

$$S^1 = \{z; z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

à isotopie (déformation élastique) près.

Nœud trivial 

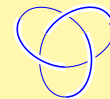
Nœud de trèfle droit 

Nœud de trèfle gauche 

Nœud de bienvenue de Royal Air Maroc :



Les nœuds , trèfle droit , trèfle gauche



le nœud marocain sont tous distincts.

Pour le montrer, on utilise des invariants, c'est-à-dire des fonctions de ces plongements invariantes par isotopie.

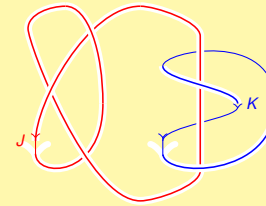
Soit $n \in \mathbb{N}$, les entrelacs à n composantes sont des plongements de n cercles disjoints

$$S^1 = \{z; z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

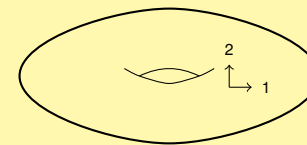
à isotopie (déformation élastique) près.

Soit $J \amalg K$ un entrelacs à deux composantes

$$J \amalg K: S^1 \amalg S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

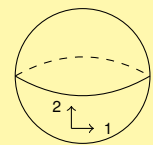


$$p_{JK}: \begin{array}{ccc} S^1 \times S^1 & \rightarrow & S^2 \\ (w, z) & \mapsto & \frac{1}{\|K(z) - J(w)\|} (K(z) - J(w)) \end{array}$$



Application de Gauss

$$p_{JK}$$



Le nombre d'enlacement $lk(J, K)$ est le degré de p_{JK} .

$$\begin{aligned} lk(J, K) &= \# \begin{array}{c} J \\ \diagup \diagdown \\ K \end{array} - \# \begin{array}{c} K \\ \diagup \diagdown \\ J \end{array} \\ &= \# \begin{array}{c} K \\ \diagup \diagdown \\ J \end{array} - \# \begin{array}{c} J \\ \diagup \diagdown \\ K \end{array} \\ &= \frac{1}{2} \left(\# \begin{array}{c} J \\ \diagup \diagdown \\ K \end{array} - \# \begin{array}{c} K \\ \diagup \diagdown \\ J \end{array} + \# \begin{array}{c} K \\ \diagup \diagdown \\ J \end{array} - \# \begin{array}{c} J \\ \diagup \diagdown \\ K \end{array} \right) \end{aligned}$$



$$\iint \frac{(x'-x)(dydz - dzdy) + (y'-y)(dzdx - dx dz) + (z-z')(dx dy - dy dx)}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = \nabla$$

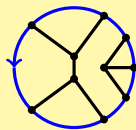
ω_{S^2} forme de volume homogène de S^2 telle que $\int_{S^2} \omega_{S^2} = 1$.

$$lk(J, K) = \int_{S^1 \times S^1} p_{JK}^*(\omega_{S^2}).$$

Diagrammes de Feynman-Jacobi Γ sur S^1 .

Sommets univalents $U(\Gamma) = \{ \vdash \}$, trivalents $T(\Gamma) = \{ \dashv \}$

Sommets $V(\Gamma) = \{ \bullet \} = U(\Gamma) \amalg T(\Gamma)$



Arêtes $E(\Gamma) = \{ \text{---} \}$

Ordre cyclique sur $U(\Gamma)$, matérialisé par $i_\Gamma: U(\Gamma) \hookrightarrow S^1$ à isotopie près.

Soit $K: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$

(Exemple : $K =$



)

Espace de configurations de (K, Γ)

$$C(K, \Gamma) = \{ c: V(\Gamma) \hookrightarrow \mathbb{R}^3; \\ c|_{U(\Gamma)} = K \circ j, \text{ pour un } j: U(\Gamma) \hookrightarrow S^1 \text{ isotope à } i_\Gamma \}$$

$$C(K, \Gamma) \subset (S^1)^{U(\Gamma)} \times (\mathbb{R}^3)^{T(\Gamma)}$$

Une arête orientée $e = v_1 \rightarrow v_2$ où $v_1 \neq v_2$ de Γ induit

$$p_e = p_{v_1 \rightarrow v_2}: \begin{array}{ccc} C(K, \Gamma) & \rightarrow & S^2 \\ c & \mapsto & \frac{1}{\|c(v_2) - c(v_1)\|} (c(v_2) - c(v_1)) \end{array}$$

$$I(K, \Gamma, o(\Gamma)) = \int_{C(K, \Gamma)} \bigwedge_{e \in E(\Gamma)} p_e^*(\omega_{S^2}) \in \mathbb{R}$$

Γ sans $\bigcirc$.

$$2\#E(\Gamma) = \#U(\Gamma) + 3\#T(\Gamma).$$

Le signe de $I(K, \Gamma)$ dépend d'une orientation pour $C(K, \Gamma)$ et des orientations arbitraires des arêtes.

Orientation de $t \in T(\Gamma)$: ordre cyclique sur les trois

demi-arêtes qui contiennent t

Orientation $o(\Gamma)$ de Γ : orientation de tous ses sommets trivalents, une telle orientation fixe le signe de $I(K, \Gamma)$.

Un système de poids est une fonction

$\psi: \{\text{diagrammes de Feynman Jacobi orientés}\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\psi(\text{---}) = -\psi(\text{---}), \psi(\text{---}) = \psi(\text{---}) - \psi(\text{---}),$$

$$\psi(\text{---}) + \psi(\text{---}) + \psi(\text{---}) = 0.$$

Theorem (1997, Witten, Bott, Taubes, Bar-Natan, Altschüler, Freidel...)

Si $\psi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est fini,

$$\sum_{\Gamma} \frac{I(K, \Gamma)}{\#Aut(\Gamma)} \psi(\Gamma) = Y(\psi, K, I(K, \bigcirc)) \in \mathbb{R}$$

ne dépend que de la classe d'isotopie de K et de $I(K, \bigcirc)$.

$Y(\psi, K, 0)$ est un invariant de noeuds.

Tous les invariants quantiques et tous les invariants de Vassiliev peuvent s'écrire comme combinaison de tels invariants.

Le degré d'un diagramme Γ est $\frac{1}{2}\#V(\Gamma)$.

Un système de poids est une fonction

$\psi: \{\text{diagrammes de Feynman Jacobi orientés}\} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\psi(\text{---}) = -\psi(\text{---}),$$

$$\psi(\text{---}) = \psi(\text{---}) - \psi(\text{---}),$$

$$\psi(\text{---}) + \psi(\text{---}) + \psi(\text{---}) = 0.$$

Theorem (1997, Witten, Kontsevich, Bar-Natan, Altschüler, Freidel...)

$$\sum_{\Gamma} \frac{I(K, \Gamma)}{\#Aut(\Gamma)} \psi(\Gamma) h^{\deg(\Gamma)} = Z(\psi, K, I(K, \bigcirc)) \in \mathbb{R}[[h]]$$

ne dépend que de la classe d'isotopie de K et de $I(K, \bigcirc)$.

$Z(\psi, K, 0)$ est un invariant de noeuds.

Exemple associé à l'algèbre de Lie $sl_2(\mathbb{R})$:

On généralise les diagrammes au cas de plusieurs S^1 .

On pose $\psi(\coprod_{i=1}^k S^1) = 2^n$.

$\psi(\Gamma \text{ with connected comp. without univalent vertices}) = 0$

$$\psi\left(\begin{array}{c} \text{H} \\ \text{I} \end{array}\right) = \psi\left(\begin{array}{c} \text{H} \\ \text{I} \end{array}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\begin{array}{c} \text{H} \\ \text{I} \end{array}\right).$$

$$\psi\left(\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{I} \end{array}\right) = \psi\left(\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{I} \end{array}\right) - \psi\left(\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{I} \end{array}\right),$$

$$\psi\left(\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{I} \end{array}\right) = -\psi\left(\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{I} \end{array}\right), \psi\left(\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{I} \end{array}\right) + \psi\left(\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{I} \end{array}\right) + \psi\left(\begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{I} \end{array}\right) = 0.$$

Theorem (2000, Witten, Bar-Natan, Poirier, Lescop...)

Il existe une suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ telle que

$$Z(\psi, L, 0) = V(L) \left(t = \exp\left(h \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i h^{2i} \right) \right) \right).$$

Plus généralement, on associe des systèmes de poids à toutes les algèbres de Lie, munies de formes bilinéaires invariantes symétriques non dégénérées, et de représentations.

Invariant de nœuds issus de la physique

L'identité de Jacobi pour les algèbres de Lie.

$$\psi_{L,b} \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) : \otimes^3 L \rightarrow L$$

$$x \otimes y \otimes z \mapsto [[x, y], z]$$

$$\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{I} \end{array} + \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{I} \end{array} + \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \text{Y} \\ \text{I} \end{array} = 0$$

$$[[x, y], z] + [y, [x, z]] = [[z, x], y]$$

Invariant de nœuds issus de la physique

- Ces constructions se généralisent dans de multiples contextes :
 - entrelacs dans des sphères d'homologie rationnelle,
 - constructions équivariantes...
- et de nombreuses questions restent ouvertes :
 - distinction des nœuds,
 - comportement par chirurgie,
 - calculs en bas degré,
 - liens avec homologie de Heegaard-Floer,
 - catégorification de ces constructions...
 - La série $(\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i h^{2i})$ est-elle égale à 1 ?
 - Plus généralement, l'anomalie de Bott et Taubes est-elle triviale ?

Merci de votre attention !

Invariant de nœuds issus de la physique

- C. LESCOPI – “About the uniqueness of the Kontsevich integral”, *J. Knot Theory Ramifications* **11** (2002), no. 5, p. 759–780.
- C. LESCOPI – “Knot invariants and configuration space integrals”, in *Geometric and topological methods for quantum field theory*, Lecture Notes in Phys., vol. 668, Springer, Berlin, 2005, p. 1–57.
- C. LESCOPI – “Introduction to finite type invariants of knots and 3-manifolds, CIMPA research school, Meknès, 2012”, preliminary version, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~lescop/preprints/meknes.pdf>.
- S. POIRIER – “The configuration space integral for links in $\mathbb{R}^3$ ”, *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002), p. 1001–1050.
- E. WITTEN – “Quantum field theory and the Jones polynomial”, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), no. 3, p. 351–399.

Invariant de nœuds issus de la physique