Sur les formes des espaces tridimentionnelles et leurs géométries

Rencontre UIR Rabat 2012

Boileau

29 juillet 2012

Dans le cycle des conférences internationales de mathématiques consacrées à *Quelques questions de Géométrie et Topologie*, organisées en 1935 par l'Université de Genève, W. Threlfall commence sa conférence de la façon suivante :

"Nous savons tous que le problème d'homéomorphie des variétés à n dimension, posé par Poincaré, est un des plus intéressants et des plus importants de la Géométrie.

Il est intéressant en soi car il a donné naissance à la Topologie combinatoire ou algébrique, théorie comparable par son importance à la Théorie des fonctions classiques.

Il est important par ses applications à la Cosmologie, où il s'agit de déterminer l'aspect de l'espace de notre intuition et de la physique.

Dès l'instant où le physicien a envisagé la possibilité de considérer l'espace de notre intuition, espace où nous vivons, comme clos, la tache du mathématicien est de lui proposer un choix d'espaces clos, et même de les énumerer tous, comme il le ferait pour les polyèdres réguliers. . . .

Dans le cycle des conférences internationales de mathématiques consacrées à *Quelques questions de Géométrie et Topologie*, organisées en 1935 par l'Université de Genève, W. Threlfall commence sa conférence de la façon suivante :

"Nous savons tous que le problème d'homéomorphie des variétés à n dimension, posé par Poincaré, est un des plus intéressants et des plus importants de la Géométrie.

Il est intéressant en soi car il a donné naissance à la Topologie combinatoire ou algébrique, théorie comparable par son importance à la Théorie des fonctions classiques.

Il est important par ses applications à la Cosmologie, où il s'agit de déterminer l'aspect de l'espace de notre intuition et de la physique.

Dès l'instant où le physicien a envisagé la possibilité de considérer l'espace de notre intuition, espace où nous vivons, comme clos, la tache du mathématicien est de lui proposer un choix d'espaces clos, et même de les énumerer tous, comme il le ferait pour les polyèdres réguliers. ...

Dans le cycle des conférences internationales de mathématiques consacrées à *Quelques questions de Géométrie et Topologie*, organisées en 1935 par l'Université de Genève, W. Threlfall commence sa conférence de la façon suivante :

"Nous savons tous que le problème d'homéomorphie des variétés à n dimension, posé par Poincaré, est un des plus intéressants et des plus importants de la Géométrie.

Il est intéressant en soi car il a donné naissance à la Topologie combinatoire ou algébrique, théorie comparable par son importance à la Théorie des fonctions classiques.

Il est important par ses applications à la Cosmologie, où il s'agit de déterminer l'aspect de l'espace de notre intuition et de la physique.

Dès l'instant où le physicien a envisagé la possibilité de considérer l'espace de notre intuition, espace où nous vivons, comme clos, la tache du mathématicien est de lui proposer un choix d'espaces clos, et même de les énumerer tous, comme il le ferait pour les polyèdres réguliers. . . .

Dans le cycle des conférences internationales de mathématiques consacrées à *Quelques questions de Géométrie et Topologie*, organisées en 1935 par l'Université de Genève, W. Threlfall commence sa conférence de la façon suivante :

"Nous savons tous que le problème d'homéomorphie des variétés à n dimension, posé par Poincaré, est un des plus intéressants et des plus importants de la Géométrie.

Il est intéressant en soi car il a donné naissance à la Topologie combinatoire ou algébrique, théorie comparable par son importance à la Théorie des fonctions classiques.

Il est important par ses applications à la Cosmologie, où il s'agit de déterminer l'aspect de l'espace de notre intuition et de la physique.

Dès l'instant où le physicien a envisagé la possibilité de considérer l'espace de notre intuition, espace où nous vivons, comme clos, la tache du mathématicien est de lui proposer un choix d'espaces clos, et même de les énumerer tous, comme il le ferait pour les polyèdres réguliers. . . .

Dans le cycle des conférences internationales de mathématiques consacrées à *Quelques questions de Géométrie et Topologie*, organisées en 1935 par l'Université de Genève, W. Threlfall commence sa conférence de la façon suivante :

"Nous savons tous que le problème d'homéomorphie des variétés à n dimension, posé par Poincaré, est un des plus intéressants et des plus importants de la Géométrie.

Il est intéressant en soi car il a donné naissance à la Topologie combinatoire ou algébrique, théorie comparable par son importance à la Théorie des fonctions classiques.

Il est important par ses applications à la Cosmologie, où il s'agit de déterminer l'aspect de l'espace de notre intuition et de la physique.

Dès l'instant où le physicien a envisagé la possibilité de considérer l'espace de notre intuition, espace où nous vivons, comme clos, la tache du mathématicien est de lui proposer un choix d'espaces clos, et même de les énumerer tous, comme il le ferait pour les polyèdres réguliers. . . .

Malheureusement le problème n'est complètement résolu que pour deux dimensions."

Soixante dix ans après, ce problème est résolu en dimension 3, grace aux travaux de W. Thurston dans les années 1970 et 1980, et plus récemment aux travaux de G. Perelman au début des années 2000.

D'énormes progrés dans la compréhension de la géométrie et de la topologie des variétés tridimensionnelles ont été accomplis, permettant maintenant d'envisager sérieusement leur classification.

De fait le problème d'homéomorphie est maintenant algorithmiquement décidable.

Malheureusement le problème n'est complètement résolu que pour deux dimensions."

Soixante dix ans après, ce problème est résolu en dimension 3, grace aux travaux de W. Thurston dans les années 1970 et 1980, et plus récemment aux travaux de G. Perelman au début des années 2000.

D'énormes progrés dans la compréhension de la géométrie et de la topologie des variétés tridimensionnelles ont été accomplis, permettant maintenant d'envisager sérieusement leur classification.

De fait le problème d'homéomorphie est maintenant algorithmiquement décidable.

Malheureusement le problème n'est complètement résolu que pour deux dimensions."

Soixante dix ans après, ce problème est résolu en dimension 3, grace aux travaux de W. Thurston dans les années 1970 et 1980, et plus récemment aux travaux de G. Perelman au début des années 2000.

D'énormes progrés dans la compréhension de la géométrie et de la topologie des variétés tridimensionnelles ont été accomplis, permettant maintenant d'envisager sérieusement leur classification.

De fait le problème d'homéomorphie est maintenant algorithmiquement décidable.

Malheureusement le problème n'est complètement résolu que pour deux dimensions."

Soixante dix ans après, ce problème est résolu en dimension 3, grace aux travaux de W. Thurston dans les années 1970 et 1980, et plus récemment aux travaux de G. Perelman au début des années 2000.

D'énormes progrés dans la compréhension de la géométrie et de la topologie des variétés tridimensionnelles ont été accomplis, permettant maintenant d'envisager sérieusement leur classification.

De fait le problème d'homéomorphie est maintenant algorithmiquement décidable.

Comme le souligne W. Threlfall dans sa conférence, un résultat majeur de la fin du 19ème siècle et du début du 20ème siècle est la preuve du Théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann.

Ce théorème, énoncé par F. Klein en 1883, a été démontré indépendemment par H. Poincaré et par P. Koebe en 1907.

Théorème (Théorème d'uniformisation de Riemann)

Toute surface fermée admet une métrique riemannienne à courbure constante $K \equiv +1, 0$ ou -1. Elle s'obtient donc comme quotient de la sphere $\mathbb{S}^2$, du plan Euclidien $\mathbb{E}^2$ ou du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ par l'action libre et discontinue d'un groupe d'isométries.

La formule de Gauss-Bonnet exprime un lien fort entre la topologie et la géométrie en dimension 2.

Elle montre, en particulier, qu'une même surface ne peut admettre deux structures modellées sur des géométries différentes.

Comme le souligne W. Threlfall dans sa conférence, un résultat majeur de la fin du 19ème siècle et du début du 20ème siècle est la preuve du Théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann.

Ce théorème, énoncé par F. Klein en 1883, a été démontré indépendamment par H. Poincaré et par P. Koebe en 1907.

Théorème (Théorème d'uniformisation de Riemann)

Toute surface fermée admet une métrique riemannienne à courbure constante $K \equiv +1, 0$ *ou* -1. *Elle s'obtient donc comme quotient de la sphere* $\mathbb{S}^2$, *du plan Euclidien* $\mathbb{E}^2$ *ou du plan hyperbolique* $\mathbb{H}^2$ *par l'action libre et discontinue d'un groupe d'isométries.*

La formule de Gauss-Bonnet exprime un lien fort entre la topologie et la géométrie en dimension 2.

Elle montre, en particulier, qu'une même surface ne peut admettre deux structures modellées sur des géométries différentes.

Comme le souligne W. Threlfall dans sa conférence, un résultat majeur de la fin du 19ème siècle et du début du 20ème siècle est la preuve du Théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann.

Ce théorème, énoncé par F. Klein en 1883, a été démontré indépendemment par H. Poincaré et par P. Koebe en 1907.

Théorème (Théorème d'uniformisation de Riemann)

Toute surface fermée admet une métrique riemannienne à courbure constante $K \equiv +1, 0$ *ou* -1. *Elle s'obtient donc comme quotient de la sphere* $\mathbb{S}^2$, *du plan Euclidien* $\mathbb{E}^2$ *ou du plan hyperbolique* $\mathbb{H}^2$ *par l'action libre et discontinue d'un groupe d'isométries.*

La formule de Gauss-Bonnet exprime un lien fort entre la topologie et la géométrie en dimension 2.

Elle montre, en particulier, qu'une même surface ne peut admettre deux structures modellées sur des géométries différentes.

Comme le souligne W. Threlfall dans sa conférence, un résultat majeur de la fin du 19ème siècle et du début du 20ème siècle est la preuve du Théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann.

Ce théorème, énoncé par F. Klein en 1883, a été démontré indépendemment par H. Poincaré et par P. Koebe en 1907.

Théorème (Théorème d'uniformisation de Riemann)

Toute surface fermée admet une métrique riemannienne à courbure constante $K \equiv +1, 0$ ou -1. Elle s'obtient donc comme quotient de la sphere $\mathbb{S}^2$, du plan Euclidien $\mathbb{E}^2$ ou du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ par l'action libre et discontinue d'un groupe d'isométries.

La formule de Gauss-Bonnet exprime un lien fort entre la topologie et la géométrie en dimension 2.

Elle montre, en particulier, qu'une même surface ne peut admettre deux structures modellées sur des géométries différentes.

Comme le souligne W. Threlfall dans sa conférence, un résultat majeur de la fin du 19ème siècle et du début du 20ème siècle est la preuve du Théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann.

Ce théorème, énoncé par F. Klein en 1883, a été démontré indépendemment par H. Poincaré et par P. Koebe en 1907.

Théorème (Théorème d'uniformisation de Riemann)

Toute surface fermée admet une métrique riemannienne à courbure constante $K \equiv +1, 0$ ou -1. Elle s'obtient donc comme quotient de la sphere $\mathbb{S}^2$, du plan Euclidien $\mathbb{E}^2$ ou du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ par l'action libre et discontinue d'un groupe d'isométries.

La formule de Gauss-Bonnet exprime un lien fort entre la topologie et la géométrie en dimension 2.

Elle montre, en particulier, qu'une même surface ne peut admettre deux structures modellées sur des géométries différentes.

Une idée fondamentale dans la géométrisation est le concepte d' *uniformisation*.

Il signifie munir le revêtement universel d'une variété M d'une structure riemannienne invariante par l'action du groupe fondamental $\pi_1 M$.

Si la structure est suffisamment rigide, elle se reflète dans les propriétés topologiques de M.

On appelle *géométrie* une variété riemannienne complete X, simplement connexe, homogène et unimodulaire.

On demande de plus que le groupe d'isométries $Isom(X)$ soit maximal : c'est-à-dire qu'il n'existe aucune metrique riemannienne sur X invariante par $Isom(X)$ dont le groupe d'isométries contienne strictement $Isom(X)$.

Deux géométries X et X' sont *équivalentes* s'il existe un difféomorphisme $\phi : X \to X'$ qui conjugue les actions de $Isom(X)$ et $Isom(X')$.

Une idée fondamentale dans la géométrisation est le concepte d' *uniformisation*.

Il signifie munir le revêtement universel d'une variété M d'une structure riemannienne invariante par l'action du groupe fondamental $\pi_1 M$.

Si la structure est suffisamment rigide, elle se reflète dans les propriétés topologiques de M.

On appelle *géométrie* une variété riemannienne complete X, simplement connexe, homogène et unimodulaire.

On demande de plus que le groupe d'isométries $Isom(X)$ soit maximal : c'est-à-dire qu'il n'existe aucune metrique riemannienne sur X invariante par $Isom(X)$ dont le groupe d'isométries contienne strictement $Isom(X)$.

Deux géométries X et X' sont *équivalentes* s'il existe un difféomorphisme $\phi : X \to X'$ qui conjugue les actions de $Isom(X)$ et $Isom(X')$.

Une idée fondamentale dans la géométrisation est le concepte d' *uniformisation*.

Il signifie munir le revêtement universel d'une variété M d'une structure riemannienne invariante par l'action du groupe fondamental $\pi_1 M$.

Si la structure est suffisamment rigide, elle se reflète dans les propriétés topologiques de M.

On appelle *géométrie* une variété riemannienne complete X, simplement connexe, homogène et unimodulaire.

On demande de plus que le groupe d'isométries $Isom(X)$ soit maximal : c'est-à-dire qu'il n'existe aucune metrique riemannienne sur X invariante par $Isom(X)$ dont le groupe d'isométries contienne strictement $Isom(X)$.

Deux géométries X et X' sont *équivalentes* s'il existe un difféomorphisme $\phi : X \to X'$ qui conjugue les actions de $Isom(X)$ et $Isom(X')$.

Une idée fondamentale dans la géométrisation est le concepte d' *uniformisation*.

Il signifie munir le revêtement universel d'une variété M d'une structure riemannienne invariante par l'action du groupe fondamental $\pi_1 M$.

Si la structure est suffisamment rigide, elle se reflète dans les propriétés topologiques de M.

On appelle *géométrie* une variété riemannienne complete X, simplement connexe, homogène et unimodulaire.

On demande de plus que le groupe d'isométries $Isom(X)$ soit maximal : c'est-à-dire qu'il n'existe aucune metrique riemannienne sur X invariante par $Isom(X)$ dont le groupe d'isométries contienne strictement $Isom(X)$.

Deux géométries X et X' sont *équivalentes* s'il existe un difféomorphisme $\phi : X \to X'$ qui conjugue les actions de $Isom(X)$ et $Isom(X')$.

Une idée fondamentale dans la géométrisation est le concepte d' *uniformisation*.

Il signifie munir le revêtement universel d'une variété M d'une structure riemannienne invariante par l'action du groupe fondamental $\pi_1 M$.

Si la structure est suffisamment rigide, elle se reflète dans les propriétés topologiques de M.

On appelle *géométrie* une variété riemannienne complete X, simplement connexe, homogène et unimodulaire.

On demande de plus que le groupe d'isométries $Isom(X)$ soit maximal : c'est-à-dire qu'il n'existe aucune metrique riemannienne sur X invariante par $Isom(X)$ dont le groupe d'isométries contienne strictement $Isom(X)$.

Deux géométries X et X' sont *équivalentes* s'il existe un difféomorphisme $\phi : X \to X'$ qui conjugue les actions de $Isom(X)$ et $Isom(X')$.

Une idée fondamentale dans la géométrisation est le concepte d' *uniformisation*.

Il signifie munir le revêtement universel d'une variété M d'une structure riemannienne invariante par l'action du groupe fondamental $\pi_1 M$.

Si la structure est suffisamment rigide, elle se reflète dans les propriétés topologiques de M.

On appelle *géométrie* une variété riemannienne complete X, simplement connexe, homogène et unimodulaire.

On demande de plus que le groupe d'isométries $Isom(X)$ soit maximal : c'est-à-dire qu'il n'existe aucune metrique riemannienne sur X invariante par $Isom(X)$ dont le groupe d'isométries contienne strictement $Isom(X)$.

Deux géométries X et X' sont *équivalentes* s'il existe un difféomorphisme $\phi : X \to X'$ qui conjugue les actions de $Isom(X)$ et $Isom(X')$.

Soient X une géométrie et $\Gamma \subset Isom(X)$ un sous-groupe discret, agissant proprement et librement sur X.

L'espace quotient X/Γ est une variété lisse, munie d'une métrique riemannienne homogène qui est localement isométrique à celle de X.

Son groupe fondamental est isomorphe à Γ.

Dire que la gómétrie X est *unimodulaire* signifie qu'il existe au moins un tel quotient de volume fini.

Une variété lisse M (peut-être avec du bord) admet une *X-structure* si son intérieur est difféomorphe à un quotient X/Γ comme ci-dessus.

Une variété est dite *géométrique* si elle admet une X-structure pour une géométrie X.

Soient X une géométrie et $\Gamma \subset Isom(X)$ un sous-groupe discret, agissant proprement et librement sur X.

L'espace quotient X/Γ est une variété lisse, munie d'une métrique riemannienne homogène qui est localement isométrique à celle de X.

Son groupe fondamental est isomorphe à Γ.

Dire que la gómétrie X est *unimodulaire* signifie qu'il existe au moins un tel quotient de volume fini.

Une variété lisse M (peut-être avec du bord) admet une X-*structure* si son intérieur est difféomorphe à un quotient X/Γ comme ci-dessus.

Une variété est dite *géométrique* si elle admet une X-structure pour une géométrie X.

Soient X une géométrie et $\Gamma \subset Isom(X)$ un sous-groupe discret, agissant proprement et librement sur X.

L'espace quotient X/Γ est une variété lisse, munie d'une métrique riemannienne homogène qui est localement isométrique à celle de X.

Son groupe fondamental est isomorphe à Γ.

Dire que la gómétrie X est *unimodulaire* signifie qu'il existe au moins un tel quotient de volume fini.

Une variété lisse M (peut-être avec du bord) admet une X*-structure* si son intérieur est difféomorphe à un quotient X/Γ comme ci-dessus.

Une variété est dite *géométrique* si elle admet une X-structure pour une géométrie X.

Soient X une géométrie et $\Gamma \subset Isom(X)$ un sous-groupe discret, agissant proprement et librement sur X.

L'espace quotient X/Γ est une variété lisse, munie d'une métrique riemannienne homogène qui est localement isométrique à celle de X.

Son groupe fondamental est isomorphe à Γ.

Dire que la gómétrie X est *unimodulaire* signifie qu'il existe au moins un tel quotient de volume fini.

Une variété lisse M (peut-être avec du bord) admet une X*-structure* si son intérieur est difféomorphe à un quotient X/Γ comme ci-dessus.

Une variété est dite *géométrique* si elle admet une X-structure pour une géométrie X.

Soient X une géométrie et $\Gamma \subset \mathit{Isom}(X)$ un sous-groupe discret, agissant proprement et librement sur X.

L'espace quotient X/Γ est une variété lisse, munie d'une métrique riemannienne homogène qui est localement isométrique à celle de X.

Son groupe fondamental est isomorphe à Γ.

Dire que la gómétrie X est *unimodulaire* signifie qu'il existe au moins un tel quotient de volume fini.

Une variété lisse M (peut-être avec du bord) admet une X*-structure* si son intérieur est difféomorphe à un quotient X/Γ comme ci-dessus.

Une variété est dite *géométrique* si elle admet une X-structure pour une géométrie X.

Soient X une géométrie et $\Gamma \subset Isom(X)$ un sous-groupe discret, agissant proprement et librement sur X.

L'espace quotient X/Γ est une variété lisse, munie d'une métrique riemannienne homogène qui est localement isométrique à celle de X.

Son groupe fondamental est isomorphe à Γ.

Dire que la gómétrie X est *unimodulaire* signifie qu'il existe au moins un tel quotient de volume fini.

Une variété lisse M (peut-être avec du bord) admet une X-*structure* si son intérieur est difféomorphe à un quotient X/Γ comme ci-dessus.

Une variété est dite *géométrique* si elle admet une X-structure pour une géométrie X.

Une géométrie X est *isotrope* si la courbure sectionnelle de X est constante.

Pour chaque dimension $n \geq 2$ il y a seulement trois géométries isotropes, à équivalence prés : la *géométrie elliptique* $\mathbb{S}^n$, la *géométrie euclidienne* $\mathbb{E}^n$ et la *géométrie hyperbolique* $\mathbb{H}^n$, à courbure sectionnelle constante respectivement égale à $+1, 0, -1$.

En dimension 2 la situation est trés spéciale en ce sens qu'une géométrie est toujours isotrope.

On ne peut pas espérer avoir un résultat analogue en dimension 3.

Threlfall remarque que la variété produit $S^1 \times S^2$ ne peut pas admettre une metrique riemannienne à courbure sectionnelle constante, car son revêtement universel $S^2 \times \mathbb{R}$ a deux bouts, contrairement à $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$ et $\mathbb{H}^3$ qui n'ont qu'un seul bout.

Une géométrie X est *isotrope* si la courbure sectionnelle de X est constante.

Pour chaque dimension $n \geq 2$ il y a seulement trois géométries isotropes, à équivalence prés : la *géométrie elliptique* $\mathbb{S}^n$, la *géométrie euclidienne* $\mathbb{E}^n$ et la *géométrie hyperbolique* $\mathbb{H}^n$, à courbure sectionnelle constante respectivement égale à $+1, 0, -1$.

En dimension 2 la situation est trés spéciale en ce sens qu'une géométrie est toujours isotrope.

On ne peut pas espérer avoir un résultat analogue en dimension 3.

Threlfall remarque que la variété produit $S^1 \times S^2$ ne peut pas admettre une metrique riemannienne à courbure sectionnelle constante, car son revêtement universel $S^2 \times \mathbb{R}$ a deux bouts, contrairement à $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$ et $\mathbb{H}^3$ qui n'ont qu'un seul bout.

Une géométrie X est *isotrope* si la courbure sectionnelle de X est constante.

Pour chaque dimension $n \geq 2$ il y a seulement trois géométries isotropes, à équivalence prés : la *géométrie elliptique* $\mathbb{S}^n$, la *géométrie euclidienne* $\mathbb{E}^n$ et la *géométrie hyperbolique* $\mathbb{H}^n$, à courbure sectionnelle constante respectivement égale à $+1, 0, -1$.

En dimension 2 la situation est trés spéciale en ce sens qu'une géométrie est toujours isotrope.

On ne peut pas espérer avoir un résultat analogue en dimension 3.

Threlfall remarque que la variété produit $S^1 \times S^2$ ne peut pas admettre une metrique riemannienne à courbure sectionnelle constante, car son revêtement universel $S^2 \times \mathbb{R}$ a deux bouts, contrairement à $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$ et $\mathbb{H}^3$ qui n'ont qu'un seul bout.

Une géométrie X est *isotrope* si la courbure sectionnelle de X est constante.

Pour chaque dimension $n \geq 2$ il y a seulement trois géométries isotropes, à équivalence prés : la *géométrie elliptique* $\mathbb{S}^n$, la *géométrie euclidienne* $\mathbb{E}^n$ et la *géométrie hyperbolique* $\mathbb{H}^n$, à courbure sectionnelle constante respectivement égale à $+1, 0, -1$.

En dimension 2 la situation est trés spéciale en ce sens qu'une géométrie est toujours isotrope.

On ne peut pas espérer avoir un résultat analogue en dimension 3.

Threlfall remarque que la variété produit $S^1 \times S^2$ ne peut pas admettre une metrique riemannienne à courbure sectionnelle constante, car son revêtement universel $S^2 \times \mathbb{R}$ a deux bouts, contrairement à $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$ et $\mathbb{H}^3$ qui n'ont qu'un seul bout.

Une géométrie X est *isotrope* si la courbure sectionnelle de X est constante.

Pour chaque dimension $n \geq 2$ il y a seulement trois géométries isotropes, à équivalence prés : la *géométrie elliptique* $\mathbb{S}^n$, la *géométrie euclidienne* $\mathbb{E}^n$ et la *géométrie hyperbolique* $\mathbb{H}^n$, à courbure sectionnelle constante respectivement égale à $+1, 0, -1$.

En dimension 2 la situation est trés spéciale en ce sens qu'une géométrie est toujours isotrope.

On ne peut pas espérer avoir un résultat analogue en dimension 3.

Threlfall remarque que la variété produit $S^1 \times S^2$ ne peut pas admettre une metrique riemannienne à courbure sectionnelle constante, car son revêtement universel $S^2 \times \mathbb{R}$ a deux bouts, contrairement à $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$ et $\mathbb{H}^3$ qui n'ont qu'un seul bout.

Au début des années 1970 Thurston a observé qu'il existe, à équivalence près, 8 géométries de dimension 3 :

Les 3 géométries *isotropes*, modelées sur $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$, and $\mathbb{H}^3$.

4 géométries *anisotropes*, de sous-groupe d'isotropie $SO(2)$: $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Nil* and $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Chacune de ces géométries admet une fibration riemannienne en cercles ou droites géodésiques sur une des géométries de dimension 2 : $\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2$ ou $\mathbb{H}^2$.

Enfin, la géométrie *Sol*, de sous-groupe d'isotropie trivial, modelée sur le seul groupe de Lie simplement connexe, unimodulaire qui est résoluble, mais pas nilpotent.

Au début des années 1970 Thurston a observé qu'il existe, à équivalence près, 8 géométries de dimension 3 :

Les 3 géométries *isotropes*, modelées sur $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$, and $\mathbb{H}^3$.

4 géométries *anisotropes*, de sous-groupe d'isotropie $SO(2)$: $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, Nil$ and $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Chacune de ces géométries admet une fibration riemannienne en cercles ou droites géodésiques sur une des géométries de dimension 2 : $\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2$ ou $\mathbb{H}^2$.

Enfin, la géométrie *Sol*, de sous-groupe d'isotropie trivial, modelée sur le seul groupe de Lie simplement connexe, unimodulaire qui est résoluble, mais pas nilpotent.

Au début des années 1970 Thurston a observé qu'il existe, à équivalence près, 8 géométries de dimension 3 :

Les 3 géométries *isotropes*, modelées sur $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$, and $\mathbb{H}^3$.

4 géométries *anisotropes*, de sous-groupe d'isotropie $SO(2)$:
$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, Nil$ and $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Chacune de ces géométries admet une fibration riemannienne en cercles ou droites géodésiques sur une des géométries de dimension 2 : $\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2$ ou $\mathbb{H}^2$.

Enfin, la géométrie *Sol*, de sous-groupe d'isotropie trivial, modelée sur le seul groupe de Lie simplement connexe, unimodulaire qui est résoluble, mais pas nilpotent.

Au début des années 1970 Thurston a observé qu'il existe, à équivalence près, 8 géométries de dimension 3 :

Les 3 géométries *isotropes*, modelées sur $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$, and $\mathbb{H}^3$.

4 géométries *anisotropes*, de sous-groupe d'isotropie $SO(2)$: $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, Nil$ and $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Chacune de ces géométries admet une fibration riemannienne en cercles ou droites géodésiques sur une des géométries de dimension 2 : $\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2$ ou $\mathbb{H}^2$.

Enfin, la géométrie *Sol*, de sous-groupe d'isotropie trivial, modelée sur le seul groupe de Lie simplement connexe, unimodulaire qui est résoluble, mais pas nilpotent.

Au début des années 1970 Thurston a observé qu'il existe, à équivalence près, 8 géométries de dimension 3 :

Les 3 géométries *isotropes*, modelées sur $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$, and $\mathbb{H}^3$.

4 géométries *anisotropes*, de sous-groupe d'isotropie $SO(2)$:
$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, Nil$ and $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Chacune de ces géométries admet une fibration riemannienne en cercles ou droites géodésiques sur une des géométries de dimension 2 : $\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^2$ ou $\mathbb{H}^2$.

Enfin, la géométrie *Sol*, de sous-groupe d'isotropie trivial, modelée sur le seul groupe de Lie simplement connexe, unimodulaire qui est résoluble, mais pas nilpotent.

Toutes ces géométries ont des quotients compacts.

Par exemple les géométries produits $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ ont respectivement pour quotient les variétés fermées $S^1 \times S^2$ et $S^1 \times F_g^2$, où F_g^2 est une surface hyperbolique, fermée, orientable de genre $g \geq 2$.

D'autres variétés fermées, fibrées en cercles S^1 où en tores T^2 admettent une géométrie anisotrope qui n'est pas un produit et correspondant à un des groupes de Lie réels *Nil*, $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ et *Sol*.

Les travaux de W. Thurston ont fait émergé une théorie géométrique des variétés en dimension 3. Cette théorie est parfaitement résumée par sa *conjecture de géométrisation* qui a été démontré en 2002 par G. Perelman.

Toutes ces géométries ont des quotients compacts.

Par exemple les géométries produits $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ ont respectivement pour quotient les variétés fermées $S^1 \times S^2$ et $S^1 \times F_g^2$, où F_g^2 est une surface hyperbolique, fermée, orientable de genre $g \geq 2$.

D'autres variétés fermées, fibrées en cercles S^1 où en tores T^2 admettent une géométrie anisotrope qui n'est pas un produit et correspondant à un des groupes de Lie réels Nil, $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ et Sol.

Les travaux de W. Thurston ont fait émergé une théorie géométrique des variétés en dimension 3. Cette théorie est parfaitement résumée par sa *conjecture de géométrisation* qui a été démontré en 2002 par G. Perelman.

Toutes ces géométries ont des quotients compacts.

Par exemple les géométries produits $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ ont respectivement pour quotient les variétés fermées $S^1 \times S^2$ et $S^1 \times F_g^2$, où F_g^2 est une surface hyperbolique, fermée, orientable de genre $g \geq 2$.

D'autres variétés fermées, fibrées en cercles S^1 où en tores T^2 admettent une géométrie anisotrope qui n'est pas un produit et correspondant à un des groupes de Lie réels Nil, $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ et Sol.

Les travaux de W. Thurston ont fait émergé une théorie géométrique des variétés en dimension 3. Cette théorie est parfaitement résumée par sa *conjecture de géométrisation* qui a été démontré en 2002 par G. Perelman.

Toutes ces géométries ont des quotients compacts.

Par exemple les géométries produits $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{E}^1$ et $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$ ont respectivement pour quotient les variétés fermées $S^1 \times S^2$ et $S^1 \times F_g^2$, où F_g^2 est une surface hyperbolique, fermée, orientable de genre $g \geq 2$.

D'autres variétés fermées, fibrées en cercles S^1 où en tores T^2 admettent une géométrie anisotrope qui n'est pas un produit et correspondant à un des groupes de Lie réels Nil, $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ et Sol.

Les travaux de W. Thurston ont fait émergé une théorie géométrique des variétés en dimension 3. Cette théorie est parfaitement résumée par sa *conjecture de géométrisation* qui a été démontré en 2002 par G. Perelman.

L'opération de *somme connexe* consite à découper une variété le long d'une sphère qui sépare la variété en en deux sous-variétés qui ne sont pas homéomorphes à une boule.

Une variété orientée de dimension 3 est *irréductible* si toute sphère S^2 plongée borde une boule dans cette variété.

L'existence et l'unicité d'une décomposition finie en somme connexe est due à H. Kneser en 1929. Une autre preuve de l'unicité des facteurs, a été donnée par J. Milnor en 1962.

Théorème (Décomposition en facteurs premiers)

Toute variété tridimensionnelle, fermée, orientée est homéomorphe à la somme connexe d'un nombre fini de variétés irréductibles et de copies de $S^1 \times S^2$. *De plus les facteurs irréductibles sont uniques à homéomorphismes préservant l'orientation près.*

Les facteurs $S^1 \times S^2$ sont géométriques. Ce théorème de Kneser permet donc de restreindre l'étude géométrique des variétés de dimension 3 au cas des variétés irréductibles.

L'opération de *somme connexe* consite à découper une variété le long d'une sphère qui sépare la variété en en deux sous-variétés qui ne sont pas homéomorphes à une boule.

Une variété orientée de dimension 3 est *irréductible* si toute sphère S^2 plongée borde une boule dans cette variété.

L'existence et l'unicité d'une décomposition finie en somme connexe est due à H. Kneser en 1929. Une autre preuve de l'unicité des facteurs, a été donnée par J. Milnor en 1962.

Théorème (Décomposition en facteurs premiers)

Toute variété tridimensionnelle, fermée, orientée est homéomorphe à la somme connexe d'un nombre fini de variétés irréductibles et de copies de $S^1 \times S^2$. De plus les facteurs irréductibles sont uniques à homéomorphismes préservant l'orientation près.

Les facteurs $S^1 \times S^2$ sont géométriques. Ce théorème de Kneser permet donc de restreindre l'étude géométrique des variétés de dimension 3 au cas des variétés irréductibles.

L'opération de *somme connexe* consite à découper une variété le long d'une sphère qui sépare la variété en en deux sous-variétés qui ne sont pas homéomorphes à une boule.

Une variété orientée de dimension 3 est *irréductible* si toute sphère S^2 plongée borde une boule dans cette variété.

L'existence et l'unicité d'une décomposition finie en somme connexe est due à H. Kneser en 1929. Une autre preuve de l'unicité des facteurs, a été donnée par J. Milnor en 1962.

Théorème (Décomposition en facteurs premiers)

Toute variété tridimensionnelle, fermée, orientée est homéomorphe à la somme connexe d'un nombre fini de variétés irréductibles et de copies de $S^1 \times S^2$. De plus les facteurs irréductibles sont uniques à homéomorphismes préservant l'orientation près.

Les facteurs $S^1 \times S^2$ sont géométriques. Ce théorème de Kneser permet donc de restreindre l'étude géométrique des variétés de dimension 3 au cas des variétés irréductibles.

L'opération de *somme connexe* consite à découper une variété le long d'une sphère qui sépare la variété en en deux sous-variétés qui ne sont pas homéomorphes à une boule.

Une variété orientée de dimension 3 est *irréductible* si toute sphère S^2 plongée borde une boule dans cette variété.

L'existence et l'unicité d'une décomposition finie en somme connexe est due à H. Kneser en 1929. Une autre preuve de l'unicité des facteurs, a été donnée par J. Milnor en 1962.

Théorème (Décomposition en facteurs premiers)

Toute variété tridimensionnelle, fermée, orientée est homéomorphe à la somme connexe d'un nombre fini de variétés irréductibles et de copies de $S^1 \times S^2$. *De plus les facteurs irréductibles sont uniques à homéomorphismes préservant l'orientation près.*

Les facteurs $S^1 \times S^2$ sont géométriques. Ce théorème de Kneser permet donc de restreindre l'étude géométrique des variétés de dimension 3 au cas des variétés irréductibles.

L'opération de *somme connexe* consite à découper une variété le long d'une sphère qui sépare la variété en en deux sous-variétés qui ne sont pas homéomorphes à une boule.

Une variété orientée de dimension 3 est *irréductible* si toute sphère S^2 plongée borde une boule dans cette variété.

L'existence et l'unicité d'une décomposition finie en somme connexe est due à H. Kneser en 1929. Une autre preuve de l'unicité des facteurs, a été donnée par J. Milnor en 1962.

Théorème (Décomposition en facteurs premiers)

Toute variété tridimensionnelle, fermée, orientée est homéomorphe à la somme connexe d'un nombre fini de variétés irréductibles et de copies de $S^1 \times S^2$. De plus les facteurs irréductibles sont uniques à homéomorphismes préservant l'orientation près.

Les facteurs $S^1 \times S^2$ sont géométriques. Ce théorème de Kneser permet donc de restreindre l'étude géométrique des variétés de dimension 3 au cas des variétés irréductibles.

En 2002 Gregori Perelman a résolu la conjecture de géométrisation de Thurston :

Théorème (Perelman 2002)

Toute variété de dimension 3 M, fermée, orientée, irréductible admet une décomposition canonique en deux sous-variétés compactes de dimension 3 (peut-être vides ou non connexes) : $M = H \cup G$ telles que :

1. *$int(H)$ porte une structure hyperbolique complète à volume fini.*
2. *G est une variétée graphée.*
3. *$\partial H = \partial G$ est une collection (peut-être vide) de tores essentiels (i.e. non contenus dans une boule B^3 et ne bordant pas de tore solide $S^1 \times D^2$)*

En 2002 Gregori Perelman a résolu la conjecture de géométrisation de Thurston :

Théorème (Perelman 2002)

Toute variété de dimension 3 M, fermée, orientée, irréductible admet une décomposition canonique en deux sous-variétés compactes de dimension 3 (peut-être vides ou non connexes) : $M = H \cup G$ telles que :

1. *$int(H)$ porte une structure hyperbolique complète à volume fini.*
2. *G est une variétée graphée.*
3. *$\partial H = \partial G$ est une collection (peut-être vide) de tores essentiels (i.e. non contenus dans une boule B^3 et ne bordant pas de tore solide $S^1 \times D^2$)*

On dit qu'une variétée est *graphée* si elle est obtenue en recollant, le long de composantes de bord, un nombre fini de morceaux élémentaires difféomorphes à un *tore solide* $S^1 \times D^2$, un *tore épaissi* $T^2 \times [0,1]$ ou un *pantalon* $S^1 \times \{\text{sphère à 3 trous}\}$.

En particulier, une variété graphée est obtenue en recollant ensemble des morceaux géométriques qui ne sont pas hyperboliques.

Le résultat de Perelman implique la fameuse Conjecture de Poincaré :

Corollaire (Perelmann 2002)

Une variété fermée simplement connexe est difféomorphe à la sphère S^3.

On dit qu'une variétée est *graphée* si elle est obtenue en recollant, le long de composantes de bord, un nombre fini de morceaux élémentaires difféomorphes à un *tore solide* $S^1 \times D^2$, un *tore épaissi* $T^2 \times [0,1]$ ou un *pantalon* $S^1 \times \{\text{sphère à 3 trous}\}$.

En particulier, une variété graphée est obtenue en recollant ensemble des morceaux géométriques qui ne sont pas hyperboliques.

Le résultat de Perelman implique la fameuse Conjecture de Poincaré :

Corollaire (Perelmann 2002)

Une variété fermée simplement connexe est difféomorphe à la sphère S^3.

On dit qu'une variétée est *graphée* si elle est obtenue en recollant, le long de composantes de bord, un nombre fini de morceaux élémentaires difféomorphes à un *tore solide* $S^1 \times D^2$, un *tore épaissi* $T^2 \times [0,1]$ ou un *pantalon* $S^1 \times \{\text{sphère à 3 trous}\}$.

En particulier, une variété graphée est obtenue en recollant ensemble des morceaux géométriques qui ne sont pas hyperboliques.

Le résultat de Perelman implique la fameuse Conjecture de Poincaré :

Corollaire (Perelmann 2002)

Une variété fermée simplement connexe est difféomorphe à la sphère S^3.

On dit qu'une variétée est *graphée* si elle est obtenue en recollant, le long de composantes de bord, un nombre fini de morceaux élémentaires difféomorphes à un *tore solide* $S^1 \times D^2$, un *tore épaissi* $T^2 \times [0,1]$ ou un *pantalon* $S^1 \times \{\text{sphère à 3 trous}\}$.

En particulier, une variété graphée est obtenue en recollant ensemble des morceaux géométriques qui ne sont pas hyperboliques.

Le résultat de Perelman implique la fameuse Conjecture de Poincaré :

Corollaire (Perelmann 2002)

Une variété fermée simplement connexe est difféomorphe à la sphère S^3.

Voici un cas spécial important du théorème de Perelman qui montre que la topologie prédit la géométrie.

Théorème (Perelman 2002)

soit M une variété fermée, orientée et irréductible.

1. *Si le revêtement universel de M est compact, alors M est sphérique, i.e. $M = \mathbb{S}^3/\Gamma$, avec $\Gamma \subset S(O,4)$ un groupe fini.*
2. *Si le revêtement universel de M n'est pas compact et $\pi_1(M)$ ne contient pas de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, alors M est hyperbolique i.e. $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$, avec $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{C}$ un sous-groupe discret et cocompact.*

La conjecture de géométrisation donne une décomposition "topologique" en *partie mince* et *partie épaisse* d'une variété fermée, orientée, de dimension 3.

- $H =$ la partie épaisse de M : $int(H)$ n'admet aucune suite de métriques riemanniènnes à courbure sectionnelle minorée, dont le volume tend vers 0.
- $G =$ la partie mince de M : il existe sur G des suites de métriques riemanniènnes à courbure sectionnelle bornées, dont le volume tend vers 0.

Dans le dernier cas on dit que la suite de métriques riemanniennes *s'effondre*.

La conjecture de géométrisation donne une décomposition "topologique" en *partie mince* et *partie épaisse* d'une variété fermée, orientée, de dimension 3.

- $H =$ la partie épaisse de M : $int(H)$ n'admet aucune suite de métriques riemanniènnes à courbure sectionnelle minorée, dont le volume tend vers 0.
- $G =$ la partie mince de M : il existe sur G des suites de métriques riemanniènnes à courbure sectionnelle bornées, dont le volume tend vers 0.

Dans le dernier cas on dit que la suite de métriques riemanniennes *s'effondre*.

La conjecture de géométrisation donne une décomposition "topologique" en *partie mince* et *partie épaisse* d'une variété fermée, orientée, de dimension 3.

- $H =$ la partie épaisse de M : $int(H)$ n'admet aucune suite de métriques riemanniènnes à courbure sectionnelle minorée, dont le volume tend vers 0.
- $G =$ la partie mince de M : il existe sur G des suites de métriques riemanniènnes à courbure sectionnelle bornées, dont le volume tend vers 0.

Dans le dernier cas on dit que la suite de métriques riemanniennes *s'effondre*.

Le résultat suivant est une conséquence du théorème de Perelman et de travaux plus ancients de Besson-Courtois-Gallot et de Boyland-Connell-Souto sur le volume minimal d'une variété riemannienne à courbure sectionnelle minorée.

Théorème

Soit M une variété fermée, orientée et irréductible. Toute suite g_n de métriques riemanniennes sur M, à courbure sectionnelle $K_{g_n} \geq -1$ qui minimise le volume, converge vers une métrique hyperbolique complète à courbure constante -1 sur la partie épaisse H et s'effondre sur la partie mince G.

En particulier $vol(H)$ est le volume minimal sur toutes les métriques riemanniennes sur M, à courbure sectionnelle minorée par -1.

Le résultat suivant est une conséquence du théorème de Perelman et de travaux plus ancients de Besson-Courtois-Gallot et de Boyland-Connell-Souto sur le volume minimal d'une variété riemannienne à courbure sectionnelle minorée.

Théorème

Soit M une variété fermée, orientée et irréductible. Toute suite g_n de métriques riemanniennes sur M, à courbure sectionnelle $K_{g_n} \geq -1$ qui minimise le volume, converge vers une métrique hyperbolique complète à courbure constante -1 sur la partie épaisse H et s'effondre sur la partie mince G.

En particulier $vol(H)$ est le volume minimal sur toutes les métriques riemanniennes sur M, à courbure sectionnelle minorée par -1.

Au début des années 1980 Richard Hamilton a proposé un nouveau programme pour démontrer la conjecture de géométrisation.

Son approche est basée sur le flot de Ricci : il s'agit d'étudier les solutions d'une équation différentielle, liée à la courbure (le flot de Ricci), sur l'espace des métriques riemanniennes de la variété M considérée.

On appelle flot de Ricci, une famille $g(t)$ de métriques riemanniennes sur M, définie sur un intervalle $[0, T[$ et qui vérifie l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{dg}{dt} = -2Ric(g),$$

Au début des années 1980 Richard Hamilton a proposé un nouveau programme pour démontrer la conjecture de géométrisation.

Son approche est basée sur le flot de Ricci : il s'agit d'étudier les solutions d'une équation différentielle, liée à la courbure (le flot de Ricci), sur l'espace des métriques riemanniennes de la variété M considérée.

On appelle flot de Ricci, une famille $g(t)$ de métriques riemanniennes sur M, définie sur un intervalle $[0, T[$ et qui vérifie l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{dg}{dt} = -2Ric(g),$$

Au début des années 1980 Richard Hamilton a proposé un nouveau programme pour démontrer la conjecture de géométrisation.

Son approche est basée sur le flot de Ricci : il s'agit d'étudier les solutions d'une équation différentielle, liée à la courbure (le flot de Ricci), sur l'espace des métriques riemanniennes de la variété M considérée.

On appelle flot de Ricci, une famille $g(t)$ de métriques riemanniennes sur M, définie sur un intervalle $[0, T[$ et qui vérifie l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{dg}{dt} = -2Ric(g),$$

Au début des années 1980 Richard Hamilton a proposé un nouveau programme pour démontrer la conjecture de géométrisation.

Son approche est basée sur le flot de Ricci : il s'agit d'étudier les solutions d'une équation différentielle, liée à la courbure (le flot de Ricci), sur l'espace des métriques riemanniennes de la variété M considérée.

On appelle flot de Ricci, une famille $g(t)$ de métriques riemanniennes sur M, définie sur un intervalle $[0, T[$ et qui vérifie l'équation d'évolution suivante :

$$\frac{dg}{dt} = -2Ric(g),$$

Sur la sphère ronde, le flot de Ricci a pour solution $g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2\lambda}[$, si la courbure de Ricci de la métrique initiale est $Ric_{g_0} = \lambda g_0$ avec $\lambda > 0$.

Plus généralement le flot évolue par homothétie si la métrique initiale est d'Einstein. On peut résumer l'évolution en disant que les métriques de courbure négative enflent et celles de courbure positive se contractent.

Lorsque le flot évolue la métrique s'homogénéise, mais l'étalement de la courbure n'est pas uniforme : en temps fini elle peut s'accumuler et devenir infinie en certains points de la variété.

Perelman a décrit la métrique au voisinage de ces points de grande courbure, appelés *singularités du flot de Ricci*.

Si la courbure est grande partout, on en déduit que la variété M est la sphère S^3. Dans ce cas on dit que le flot *s'éteint*.

Sur la sphère ronde, le flot de Ricci a pour solution $g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2\lambda}[$, si la courbure de Ricci de la métrique initiale est $Ric_{g_0} = \lambda g_0$ avec $\lambda > 0$.

Plus généralement le flot évolue par homothétie si la métrique initiale est d'Einstein. On peut résumer l'évolution en disant que les métriques de courbure négative enflent et celles de courbure positive se contractent.

Lorsque le flot évolue la métrique s'homogénéise, mais l'étalement de la courbure n'est pas uniforme : en temps fini elle peut s'accumuler et devenir infinie en certains points de la variété.

Perelman a décrit la métrique au voisinage de ces points de grande courbure, appelés *singularités du flot de Ricci*.

Si la courbure est grande partout, on en déduit que la variété M est la sphère S^3. Dans ce cas on dit que le flot *s'éteint*.

Sur la sphère ronde, le flot de Ricci a pour solution $g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2\lambda}[$, si la courbure de Ricci de la métrique initiale est $Ric_{g_0} = \lambda g_0$ avec $\lambda > 0$.

Plus généralement le flot évolue par homothétie si la métrique initiale est d'Einstein. On peut résumer l'évolution en disant que les métriques de courbure négative enflent et celles de courbure positive se contractent.

Lorsque le flot évolue la métrique s'homogénéise, mais l'étalement de la courbure n'est pas uniforme : en temps fini elle peut s'accumuler et devenir infinie en certains points de la variété.

Perelman a décrit la métrique au voisinage de ces points de grande courbure, appelés *singularités du flot de Ricci*.

Si la courbure est grande partout, on en déduit que la variété M est la sphère S^3. Dans ce cas on dit que le flot *s'éteint*.

Sur la sphère ronde, le flot de Ricci a pour solution $g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2\lambda}[$, si la courbure de Ricci de la métrique initiale est $Ric_{g_0} = \lambda g_0$ avec $\lambda > 0$.

Plus généralement le flot évolue par homothétie si la métrique initiale est d'Einstein. On peut résumer l'évolution en disant que les métriques de courbure négative enflent et celles de courbure positive se contractent.

Lorsque le flot évolue la métrique s'homogénéise, mais l'étalement de la courbure n'est pas uniforme : en temps fini elle peut s'accumuler et devenir infinie en certains points de la variété.

Perelman a décrit la métrique au voisinage de ces points de grande courbure, appelés *singularités du flot de Ricci*.

Si la courbure est grande partout, on en déduit que la variété M est la sphère S^3. Dans ce cas on dit que le flot *s'éteint*.

Sur la sphère ronde, le flot de Ricci a pour solution $g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2\lambda}[$, si la courbure de Ricci de la métrique initiale est $Ric_{g_0} = \lambda g_0$ avec $\lambda > 0$.

Plus généralement le flot évolue par homothétie si la métrique initiale est d'Einstein. On peut résumer l'évolution en disant que les métriques de courbure négative enflent et celles de courbure positive se contractent.

Lorsque le flot évolue la métrique s'homogénéise, mais l'étalement de la courbure n'est pas uniforme : en temps fini elle peut s'accumuler et devenir infinie en certains points de la variété.

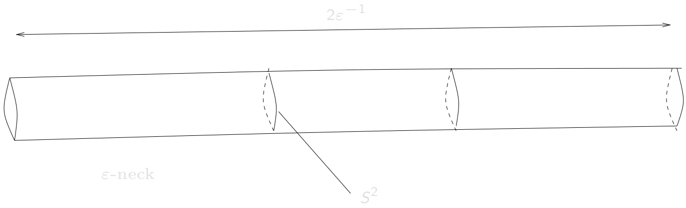
Perelman a décrit la métrique au voisinage de ces points de grande courbure, appelés *singularités du flot de Ricci*.

Si la courbure est grande partout, on en déduit que la variété M est la sphère S^3. Dans ce cas on dit que le flot *s'éteint*.

Si la variété M n'est pas sphérique, Perelman montre que pour tout $0 < \varepsilon << 1$, il existe une constante universelle $r = r(\varepsilon) > 0$ avec la propriété suivante :

Au voisinage d'un point x de grande courbure scalaire $R(x,t) \geq r^{-2}$ d'un flot de Ricci $(M, g(t))$, la géométrie est presque isométrique après une dilatation de facteur $\sqrt{R(x,t)}$, à un des modèles suivants :

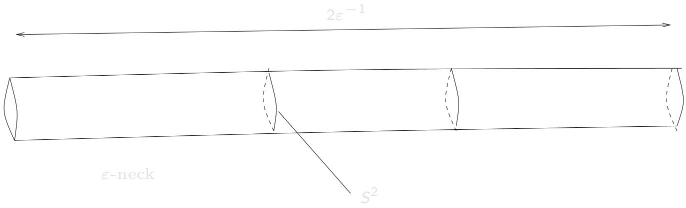
(a) Un ε-cou $S^2 \times]-1/\varepsilon, 1/\varepsilon[$, avec la métrique canonique produit, de courbure scalaire 1.



Si la variété M n'est pas sphérique, Perelman montre que pour tout $0 < \varepsilon << 1$, il existe une constante universelle $r = r(\varepsilon) > 0$ avec la propriété suivante :

Au voisinage d'un point x de grande courbure scalaire $R(x,t) \geq r^{-2}$ d'un flot de Ricci $(M, g(t))$, la géométrie est presque isométrique après une dilatation de facteur $\sqrt{R(x,t)}$, à un des modèles suivants :

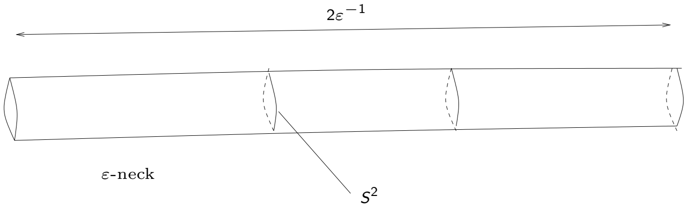
(a) Un ε-cou $S^2 \times]-1/\varepsilon, 1/\varepsilon[$, avec la métrique canonique produit, de courbure scalaire 1.



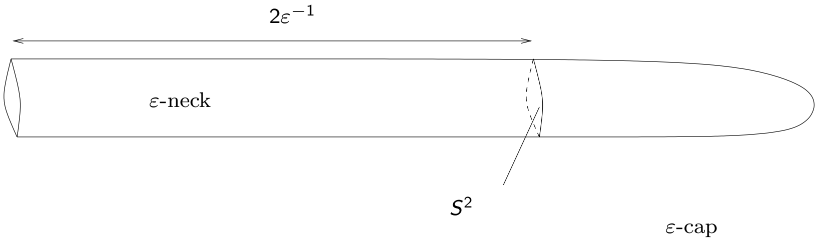
Si la variété M n'est pas sphérique, Perelman montre que pour tout $0 < \varepsilon << 1$, il existe une constante universelle $r = r(\varepsilon) > 0$ avec la propriété suivante :

Au voisinage d'un point x de grande courbure scalaire $R(x,t) \geq r^{-2}$ d'un flot de Ricci $(M, g(t))$, la géométrie est presque isométrique après une dilatation de facteur $\sqrt{R(x,t)}$, à un des modèles suivants :

(a) Un ε-cou $S^2 \times]-1/\varepsilon, 1/\varepsilon[$, avec la métrique canonique produit, de courbure scalaire 1.



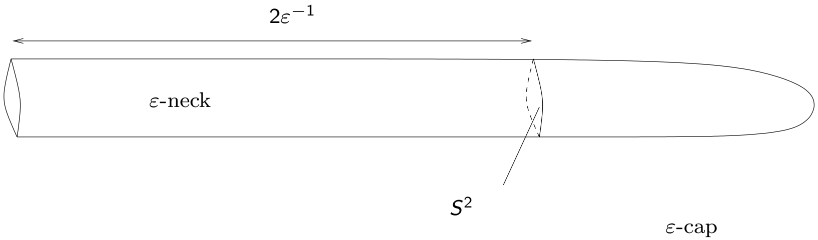
(b) Un ε-capuchon B^3, munie d'une métrique de courbure strictement positive, dont un collier du bord est ε-cou.



Deux variétés riemanniennes sont ε-presque-isométriques si elles sont difféomorphes et leurs métriques sont ε-proches ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq 1/\epsilon$.

En particulier, les courbures sur ces voisinages "canoniques" sont comparables à la courbure scalaire $R(x,t)$. La taille des voisinages correspondant à (a) et (b) est comparable à $R(x,t)^{-1/2} \times 2/\varepsilon$.

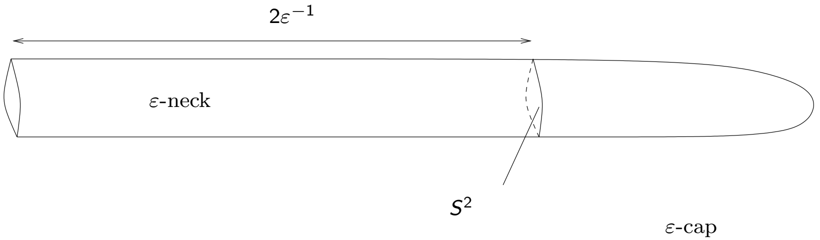
(b) Un ε-capuchon B^3, munie d'une métrique de courbure strictement positive, dont un collier du bord est ε-cou.



Deux variétés riemanniennes sont ε-presque-isométriques si elles sont difféomorphes et leurs métriques sont ε-proches ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq 1/\epsilon$.

En particulier, les courbures sur ces voisinages "canoniques" sont comparables à la courbure scalaire $R(x,t)$. La taille des voisinages correspondant à (a) et (b) est comparable à $R(x,t)^{-1/2} \times 2/\varepsilon$.

(b) Un ε-capuchon B^3, munie d'une métrique de courbure strictement positive, dont un collier du bord est ε-cou.



Deux variétés riemanniennes sont ε-presque-isométriques si elles sont difféomorphes et leurs métriques sont ε-proches ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq 1/\epsilon$.

En particulier, les courbures sur ces voisinages "canoniques" sont comparables à la courbure scalaire $R(x,t)$. La taille des voisinages correspondant à (a) et (b) est comparable à $R(x,t)^{-1/2} \times 2/\varepsilon$.

L'idée est alors de se débarrasser des morceaux de M de grande courbure, en remplaccant la métrique dans des boules qui les contiennent par des ε-capuchons standards.

Puis on relance le flot de Ricci sur la variété M avec la métrique après chirurgie comme métrique initiale.

Cette procédure peut-être répétée autant de fois que nécessaire, car des estimations sur le flot de Ricci montre que sur chaque intervalle de temps fini, on n'opère qu'un nombre fini de chirurgies.

Si la courbure ne devient pas très grande partout, c'est dire si le flot ne s'éteint pas, Perelman démontre qu'on peut poursuivre le *flot avec chirurgie* indéfiniment, pour toute donnée initiale convenablement normalisée.

L'idée est alors de se débarrasser des morceaux de M de grande courbure, en remplaccant la métrique dans des boules qui les contiennent par des ε-capuchons standards.

Puis on relance le flot de Ricci sur la variété M avec la métrique après chirurgie comme métrique initiale.

Cette procédure peut-être répétée autant de fois que nécessaire, car des estimations sur le flot de Ricci montre que sur chaque intervalle de temps fini, on n'opère qu'un nombre fini de chirurgies.

Si la courbure ne devient pas très grande partout, c'est dire si le flot ne s'éteint pas, Perelman démontre qu'on peut poursuivre le *flot avec chirurgie* indéfiniment, pour toute donnée initiale convenablement normalisée.

L'idée est alors de se débarrasser des morceaux de M de grande courbure, en remplaccant la métrique dans des boules qui les contiennent par des ε-capuchons standards.

Puis on relance le flot de Ricci sur la variété M avec la métrique après chirurgie comme métrique initiale.

Cette procédure peut-être répétée autant de fois que nécessaire, car des estimations sur le flot de Ricci montre que sur chaque intervalle de temps fini, on n'opère qu'un nombre fini de chirurgies.

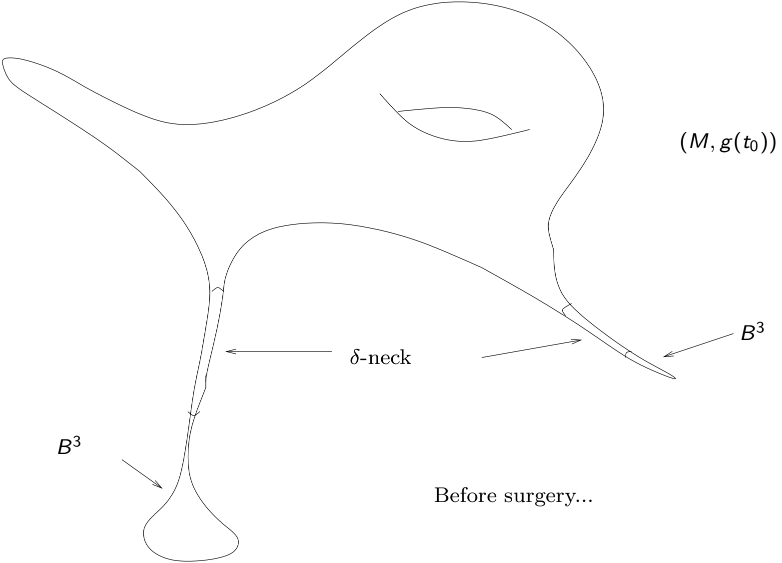
Si la courbure ne devient pas très grande partout, c'est dire si le flot ne s'éteint pas, Perelman démontre qu'on peut poursuivre le *flot avec chirurgie* indéfiniment, pour toute donnée initiale convenablement normalisée.

L'idée est alors de se débarrasser des morceaux de M de grande courbure, en remplaccant la métrique dans des boules qui les contiennent par des ε-capuchons standards.

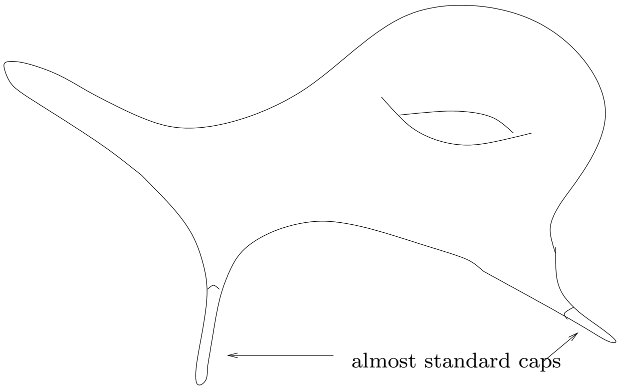
Puis on relance le flot de Ricci sur la variété M avec la métrique après chirurgie comme métrique initiale.

Cette procédure peut-être répétée autant de fois que nécessaire, car des estimations sur le flot de Ricci montre que sur chaque intervalle de temps fini, on n'opère qu'un nombre fini de chirurgies.

Si la courbure ne devient pas très grande partout, c'est dire si le flot ne s'éteint pas, Perelman démontre qu'on peut poursuivre le *flot avec chirurgie* indéfiniment, pour toute donnée initiale convenablement normalisée.



Before surgery...



$(M, g_+(t_0))$

....after surgery

On construit ainsi une famille à 1-paramètre $\{g(t)\}_t$ qui est $\mathcal{C}^1$-par morceau par rapport au temps t, telle que pour chaque *temps singulier* t_0 (i.e. valeur de t telle que $g(\cdot)$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de t_0) l'application $t \mapsto g(t)$est continue à gauche et a une limite à droite $g_+(t_0)$.

Une famille à 1-paramètre $\{g(t)\}_t$ est un *flot de Ricci avec chirurgie* sur [0, T] si :

1. Il y a un ensemble fini de temps singuliers, où la fonction $t \to g(t)$ n'est pas continue.
2. L'équation $\frac{dg}{dt} = -2Ric(g)$, est satisfaite pour tout temps non singulier.
3. Pour chaque temps singulier t_0, $g_+(t_0) \leqslant g(t_0)$.

On construit ainsi une famille à 1-paramètre $\{g(t)\}_t$ qui est $\mathcal{C}^1$-par morceau par rapport au temps t, telle que pour chaque *temps singulier* t_0 (i.e. valeur de t telle que $g(\cdot)$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de t_0) l'application $t \mapsto g(t)$est continue à gauche et a une limite à droite $g_+(t_0)$.

Une famille à 1-paramètre $\{g(t)\}_t$ est un *flot de Ricci avec chirurgie* sur [0, T] si :

1. Il y a un ensemble fini de temps singuliers, où la fonction $t \longrightarrow g(t)$ n'est pas continue.
2. L'équation $\frac{dg}{dt} = -2Ric(g)$, est satisfaite pour tout temps non singulier.
3. Pour chaque temps singulier t_0, $g_+(t_0) \leqslant g(t_0)$.

Le résultat suivant de Perelman montre l'influence de la topologie sur le comportement du flot :

Théorème

Soit M une variété de dimension 3, fermée, orienté et irréductible, et g_0 une métrique riemannienne sur M. Alors :

(1) Si $|\pi_1(M)| < \infty$, il existe un temps $T(g_0) > 0$ tel qu'aucun flot de Ricci avec chirurgie $\{g(t)\}_t$ sur M, de condition initiale $g(0) = g_0$, ne puisse être défini sur $[0, T]$ avec $T \geq T(g_0)$.

(2)Si $|\pi_1(M)| = \infty$, pour tout temps $T > 0$, il existe un flot de Ricci avec chirurgie $\{g(t)\}_t$ sur M, de condition initiale $g(0) = g_0$, qui est défini sur $[0, T]$.

Le résultat suivant de Perelman montre l'influence de la topologie sur le comportement du flot :

Théorème

Soit M une variété de dimension 3, fermée, orienté et irréductible, et g_0 une métrique riemannienne sur M. Alors :

(1) Si $|\pi_1(M)| < \infty$, il existe un temps $T(g_0) > 0$ tel qu'aucun flot de Ricci avec chirurgie $\{g(t)\}_t$ sur M, de condition initiale $g(0) = g_0$, ne puisse être défini sur $[0, T]$ avec $T \geq T(g_0)$.

(2)Si $|\pi_1(M)| = \infty$, pour tout temps $T > 0$, il existe un flot de Ricci avec chirurgie $\{g(t)\}_t$ sur M, de condition initiale $g(0) = g_0$, qui est défini sur $[0, T]$.

Une fois établi l'existence d'un flot avec chirurgie en temps infini lorsqu'il ne s'étient pas, la preuve de la conjecture de Poincaré consiste à montrer qu'il s'éteint en temps fini sur une variété simplement connexe.

Les modèles pour les voisinages canoniques permettent alors de montrer que celle-ci est difféomorphe à S^3.

On se donne une variété M compacte, simplement connexe que l'on suppose irréductible .

On munit M d'une métrique normalisée g_0. On construit un flot avec chirurgie $(M, g(t))$ que l'on suppose défini sur $[0, \infty)$.

On montre par contradiction que le flot s'éteint en temps fini, en utilisant un argument de T. Colding et W. Minicozzi.

Une fois établi l'existence d'un flot avec chirurgie en temps infini lorsqu'il ne s'étient pas, la preuve de la conjecture de Poincaré consiste à montrer qu'il s'éteint en temps fini sur une variété simplement connexe.

Les modèles pour les voisinages canoniques permettent alors de montrer que celle-ci est difféomorphe à S^3.

On se donne une variété M compacte, simplement connexe que l'on suppose irréductible .

On munit M d'une métrique normalisée g_0. On construit un flot avec chirurgie $(M, g(t))$ que l'on suppose défini sur $[0, \infty)$.

On montre par contradiction que le flot s'éteint en temps fini, en utilisant un argument de T. Colding et W. Minicozzi.

Une fois établi l'existence d'un flot avec chirurgie en temps infini lorsqu'il ne s'étient pas, la preuve de la conjecture de Poincaré consiste à montrer qu'il s'éteint en temps fini sur une variété simplement connexe.

Les modèles pour les voisinages canoniques permettent alors de montrer que celle-ci est difféomorphe à S^3.

On se donne une variété M compacte, simplement connexe que l'on suppose irréductible .

On munit M d'une métrique normalisée g_0. On construit un flot avec chirurgie $(M, g(t))$ que l'on suppose défini sur $[0, \infty)$.

On montre par contradiction que le flot s'éteint en temps fini, en utilisant un argument de T. Colding et W. Minicozzi.

Une fois établi l'existence d'un flot avec chirurgie en temps infini lorsqu'il ne s'étient pas, la preuve de la conjecture de Poincaré consiste à montrer qu'il s'éteint en temps fini sur une variété simplement connexe.

Les modèles pour les voisinages canoniques permettent alors de montrer que celle-ci est difféomorphe à S^3.

On se donne une variété M compacte, simplement connexe que l'on suppose irréductible .

On munit M d'une métrique normalisée g_0. On construit un flot avec chirurgie $(M, g(t))$ que l'on suppose défini sur $[0, \infty)$.

On montre par contradiction que le flot s'éteint en temps fini, en utilisant un argument de T. Colding et W. Minicozzi.

Une fois établi l'existence d'un flot avec chirurgie en temps infini lorsqu'il ne s'étient pas, la preuve de la conjecture de Poincaré consiste à montrer qu'il s'éteint en temps fini sur une variété simplement connexe.

Les modèles pour les voisinages canoniques permettent alors de montrer que celle-ci est difféomorphe à S^3.

On se donne une variété M compacte, simplement connexe que l'on suppose irréductible .

On munit M d'une métrique normalisée g_0. On construit un flot avec chirurgie $(M, g(t))$ que l'on suppose défini sur $[0, \infty)$.

On montre par contradiction que le flot s'éteint en temps fini, en utilisant un argument de T. Colding et W. Minicozzi.

La largeur de $(M, g(t))$ est définie par minimax de l'énergie des sphères S^2 d'un balayage de M.

C'est une quantité strictement positive lorsque le lacet définissant le balayage est essentiel dans l'espace Ω des applications de S^2 dans $(M, g(t))$, continues et d'énergie bornée.

L'existence d'un lacet essentiel dans Ω est une conséquence de la simple connexité de M qui entraine que le 3ème groupe d'homotopie $\pi_3(M) \neq \{0\}$.

On fixe la classe d'homotopie β d'un lacet essentiel dans Ω et on définit la largeur $W([\beta], g(t))$ de la variété riemannienne $(M, g(t))$ comme suit :

La largeur de $(M, g(t))$ est définie par minimax de l'énergie des sphères S^2 d'un balayage de M.

C'est une quantité strictement positive lorsque le lacet définissant le balayage est essentiel dans l'espace Ω des applications de S^2 dans $(M, g(t))$, continues et d'énergie bornée.

L'existence d'un lacet essentiel dans Ω est une conséquence de la simple connexité de M qui entraine que le 3ème groupe d'homotopie $\pi_3(M) \neq \{0\}$.

On fixe la classe d'homotopie β d'un lacet essentiel dans Ω et on définit la largeur $W([\beta], g(t))$ de la variété riemannienne $(M, g(t))$ comme suit :

La largeur de $(M, g(t))$ est définie par minimax de l'énergie des sphères S^2 d'un balayage de M.

C'est une quantité strictement positive lorsque le lacet définissant le balayage est essentiel dans l'espace Ω des applications de S^2 dans $(M, g(t))$, continues et d'énergie bornée.

L'existence d'un lacet essentiel dans Ω est une conséquence de la simple connexité de M qui entraine que le 3ème groupe d'homotopie $\pi_3(M) \neq \{0\}$.

On fixe la classe d'homotopie β d'un lacet essentiel dans Ω et on définit la largeur $W([\beta], g(t))$ de la variété riemannienne $(M, g(t))$ comme suit :

La largeur de $(M, g(t))$ est définie par minimax de l'énergie des sphères S^2 d'un balayage de M.

C'est une quantité strictement positive lorsque le lacet définissant le balayage est essentiel dans l'espace Ω des applications de S^2 dans $(M, g(t))$, continues et d'énergie bornée.

L'existence d'un lacet essentiel dans Ω est une conséquence de la simple connexité de M qui entraine que le 3ème groupe d'homotopie $\pi_3(M) \neq \{0\}$.

On fixe la classe d'homotopie β d'un lacet essentiel dans Ω et on définit la largeur $W([\beta], g(t))$ de la variété riemannienne $(M, g(t))$ comme suit :

$$W(g(t)) := \inf_{f\in[\beta]} \max_{u\in[0,1]} E(f(\cdot,u)),$$

E est l'énergie de l'application $f : S^2 \to (M, g(t))$.

$$E(f(\cdot,u)) = \frac{1}{2}\int_{S^2} |\nabla_x f(x,u)|^2 \, dx.$$

Sur les parties lisses du flot la largeur $W([\beta], g(t))$ décroît assez vite le long du flot d'après l'inégalité suivante de Colding et Minicozzi :

$$\frac{dW([\beta], g(t)}{dt} \leq -4\pi + \frac{3}{4(t+C)} W([\beta], g(t)).$$

(C est une constante dépendant du minimum de la courbure scalaire)

$$W(g(t)) := \inf_{f\in[\beta]} \max_{u\in[0,1]} E(f(\cdot,u)),$$

E est l'énergie de l'application $f : S^2 \to (M, g(t)$.

$$E(f(\cdot,u)) = \frac{1}{2}\int_{S^2} |\nabla_x f(x,u)|^2\, dx.$$

Sur les parties lisses du flot la largeur $W([\beta], g(t))$ décroît assez vite le long du flot d'après l'inégalité suivante de Colding et Minicozzi :

$$\frac{dW([\beta], g(t)}{dt} \leq -4\pi + \frac{3}{4(t+C)} W([\beta], g(t)).$$

(C est une constante dépendant du minimum de la courbure scalaire)

$$W(g(t)) := \inf_{f \in [\beta]} \max_{u \in [0,1]} E(f(\cdot, u)),$$

E est l'énergie de l'application $f : S^2 \to (M, g(t)$.

$$E(f(\cdot, u)) = \frac{1}{2} \int_{S^2} |\nabla_x f(x, u)|^2 \, dx.$$

Sur les parties lisses du flot la largeur $W([\beta], g(t))$ décroît assez vite le long du flot d'après l'inégalité suivante de Colding et Minicozzi :

$$\frac{dW([\beta], g(t)}{dt} \leq -4\pi + \frac{3}{4(t + C)} W([\beta], g(t)).$$

(C est une constante dépendant du minimum de la courbure scalaire)

$$W(g(t)) := \inf_{f \in [\beta]} \max_{u \in [0,1]} E(f(\cdot, u)),$$

E est l'énergie de l'application $f : S^2 \to (M, g(t))$.

$$E(f(\cdot, u)) = \frac{1}{2} \int_{S^2} |\nabla_x f(x, u)|^2 \, dx.$$

Sur les parties lisses du flot la largeur $W([\beta], g(t))$ décroît assez vite le long du flot d'après l'inégalité suivante de Colding et Minicozzi :

$$\frac{dW([\beta], g(t)}{dt} \leq -4\pi + \frac{3}{4(t + C)} W([\beta], g(t)).$$

(C est une constante dépendant du minimum de la courbure scalaire)

Si le flot reste lisse, la contradiction vient du fait que la largeur atteint 0 en temps fini et, par ailleurs, doit être strictement positive.

Si t_0 est un temps singulier pour le flot $g(t)$ sur M, on a :

$$\lim_{t \to t_0^-} W([\beta], g(t)) \geq W([\beta], g_+(t_0)) .$$

Cela résulte de l'ingalit t_0, $g_+(t_0) \leqslant g(t_0)$, pour chaque temps singulier.

Si le flot reste lisse, la contradiction vient du fait que la largeur atteint 0 en temps fini et, par ailleurs, doit être strictement positive.

Si t_0 est un temps singulier pour le flot $g(t)$ sur M, on a :

$$\lim_{t \to t_0^-} W([\beta], g(t)) \geq W([\beta], g_+(t_0)) \, .$$

Cela résulte de l'ingalit t_0, $g_+(t_0) \leqslant g(t_0)$, pour chaque temps singulier.

Si le flot reste lisse, la contradiction vient du fait que la largeur atteint 0 en temps fini et, par ailleurs, doit être strictement positive.

Si t_0 est un temps singulier pour le flot $g(t)$ sur M, on a :

$$\lim_{t \to t_0^-} W([\beta], g(t)) \geq W([\beta], g_+(t_0)) .$$

Cela résulte de l'ingalit t_0, $g_+(t_0) \leqslant g(t_0)$, pour chaque temps singulier.

Si le flot reste lisse, la contradiction vient du fait que la largeur atteint 0 en temps fini et, par ailleurs, doit être strictement positive.

Si t_0 est un temps singulier pour le flot $g(t)$ sur M, on a :

$$\lim_{t \longrightarrow t_0^-} W([\beta], g(t)) \geq W([\beta], g_+(t_0)) \,.$$

Cela résulte de l'ingalit t_0, $g_+(t_0) \leqslant g(t_0)$, pour chaque temps singulier.

Références

L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot, and J. Porti, Geometrisation of 3-manifolds, EMS Tracts in Mathematics **13** (2010).

M. Boileau, S. Maillot and J. Porti, Three-dimensional orbifolds and their geometric structures, Monographie, Panorama et Synthèse **15** (2003), 167 pp. (2003).

H.-D. Cao and X.-P. Zhu A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures—application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow, *Asian J. Math.*, 10 :165–492, 2006.

B. Chow and D. Knopf, *The Ricci flow : an introduction*, volume 110 of *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

B. Kleiner and J. Lott, Notes on Perelman's papers, *Geom. Topol.*, 12(5) :2587–2855, 2008.

J. Morgan and G. Tian, *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture*, volume 3 of *Clay mathematics monographs*, American Mathematical Society, 2007.

G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, ArXiv : math.DG/0211159, november 2002.

G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, ArXiv : math.DG/0303109, march 2003.

G. Perelman, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, ArXiv : math.DG/0307245, july 2003.

J. G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, Graduate Texts in Mathematics **149**, Springer-Verlag, New York, 1994.

P. Scott, The geometries of 3-manifolds, *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983), no. 5, 401–487.

W. P. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1.*, Princeton Mathematical Press, Princeton, NJ, 1997.

W. P. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), 357–381.