Exposé le 01/04/2017

Sujet : exemples de calcul de la complexité topologique d'un groupe.

motivation : soit G un groupe quelconque et $K(G,1)$ l'espace de Maclane Eilenberg associé au groupe G. En parallèle avec la définition : $\mathrm{cat}(G) := \mathrm{cat}(K(G,1))$, on définit

$$\boxed{TC(G) := TC(K(G,1))}$$

Rappel :

1) soit X un espace topologique, on a :

- $\mathrm{cat}(X) = \min\{ k \in \mathbb{N} \,/\, X = \bigcup_{i=1}^{k+1} U_i$ où chaque $U_i \in \mathcal{O}(X)$ et $U_i \hookrightarrow X$ est homotopiquement nulle$\}$

  sinon : $\mathrm{cat}(X) = \infty$

- $TC(X) = \min\{ k \in \mathbb{N} \,/\, X \times X = \bigcup_{i=1}^{k+1} U_i$; où chaque $U_i \in \mathcal{O}(X \times X)$ et $s_i : U_i \longrightarrow \pi_X^{-1}(U_i)$ est une section continue de $\pi_i : \pi_X^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$ avec $\pi_X : X^I \longrightarrow X \times X$, $\gamma \longmapsto (\gamma(0), \gamma(1))$

  sinon $TC(X) = \infty$

- $\mathrm{cat}(X) \leq TC(X) \leq 2\,\mathrm{cat}(X)$ et $\mathrm{cat}(X) \leq \dim(X)$

- $TC(X) = \mathrm{secat}(\pi_X)$.

(2) soit G un groupe qlque ; on $K(G,1) \in Top$ et :

- $\boxed{cat(G) = cd(G)}$ où cd est la dimension cohomologique de G ~~(?)~~
- $\boxed{cd(G) \leq TC(G) \leq 2\,cd(G)}$

Qu'est ce que $cd(G)$?

(I) La dimension cohomologique.

Définition 1 : soit G un groupe quelconque.

$$cd(G) = \text{proj-dim}_{\mathbb{Z}G}\, \mathbb{Z}$$

$$= \inf\{ n \in \mathbb{N} \,/\, \mathbb{Z} \text{ possède une résolution projective de longueur } n \text{ sur } \mathbb{Z}G \}$$

$$= \inf\{ n \in \mathbb{N} \,/\, \forall i > n : H^i(G,-) = Ext^i_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},-) = 0 \}$$

$$= \sup\{ n \in \mathbb{N} \,/\, \exists\, M \in \mathbb{Z}G^{Mod} : H^n(G,M) = Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) \neq 0 \}$$

sinon, $cd(G) = \infty$

Version topologique : il existe un analogue topologique de $cd(G)$ appelé : la dimension géometrique de G ; notée $gd(G)$, définie par :

$$gd(G) = \min\{ n \in \mathbb{N} \,/\, K(G,1) \text{ est un complexe de dimension } n \}$$

Proposition : soit G un groupe quelconque. alors $cd(G) \leq gd(G)$

en général on a l'egalité

Exemples de calcul de $cd(G)$:

① G groupe trivial $\Leftrightarrow cd(G) = 0$

② G est un groupe libre non trivial à n génerateurs $\Leftrightarrow cd(G) = 1$

③ si $G = \pi_1(Y)$, où Y est une surface fermé autre que S^2 et $\mathbb{P}^2$, alors Y est un $K(G,1)$ complexe de dimension 2 ; donc $cd(G) \leq 2$. or $H^2(G, \mathbb{Z}_2) \simeq H^2(Y, \mathbb{Z}_2) \neq 0$

donc $cd(G) = 2$

④ si $G = \langle S : r \rangle$ est groupe défini pour sa presentation ou r est ~~rela~~lation unique ave $r \neq u^n$ pour tout $u \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$

alors $cd(G) \leq 2$

⑤ si $G = \mathbb{Z}^n$ est le groupe abélien libre à n generateur, alors $Y = \underbrace{\hat{S} \times \hat{S} \times \dots \hat{S}}_{n \text{ fois}}$ est un $K(G,1)$ complexe de dimension n, et on a : $H^n(Y; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \neq 0$

d'où $cd(G) = cd(\mathbb{Z}^n) = n$.

② théorème principal :

<u>Théorème</u> : soit G un groupe discret et soient A et B deux sous groupes de G.

si pour tout $g \in G$: $gAg^{-1} \cap B = \{1\}$, alors $TC(G) \geq cd(A \times B)$

Remarques :

* $A \times B$ n'est pas en general sous groupe de G et il se peut en general que $cd(A \times B) \geq cd(G)$
* Les conditions du théorème principale sont satisfaite si
  - $G = A.B$ et $A \cap B = \{1\}$ où $A \leq G$ et $B < G$, dans ce cas on dit A et B sont deux groupe complémentaire de G
  - $G = A \rtimes B$ où $A \triangleleft G$ et $A \cap B = \{1\}$ ~~et~~ [illegible]

Corollaire 1.1 : — Soit G un groupe discret et soient A et B deux sous groupe complémentaire de G, Alors :

$$TC(G) \geq cd(A \times B)$$

Corollaire 1.2 : si $G = A \rtimes B$, alors : $TC(G) \geq cd(A \times B)$

Dans la suite on ne considère que les groupes infinies sans torsion de dimension cohomologique finie car si G est un groupe de torsion (finie) ; on a : $TC(G) = \infty$.

Propriété 1 : soit A et B deux groupes, alors :

$$cd(A \times B) \leq cd(A) + cd(B)$$

exemple : on a : $cd(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = 3$ et $cd(\mathbb{Q}) = 2$

donc $cd(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) < cd(\mathbb{Q}) + cd(\mathbb{Q})$

Question : quand est-ce que on a : $cd(A \times B) = cd(A) + cd(B)$?

Rappel :

Déf 1 : un groupe A est dit groupe de dualité de dimension k si $\exists\ C \in \mathbb{Z}A^{Mod}$ et $e \in H_k(A; C)$ tel que :

$\forall\ M \in \mathbb{Z}A^{Mod}$, on a : $-\cap e : H^i(A, M) \xrightarrow{\simeq} H_{k-i}(A, M \otimes C)$

Proposition : si A est un groupe de dualité de dimension k, alors $cd(A) = k$

Déf 2 : dans la définition 1 :

* si $\mathbb{Z} \subseteq C \in \mathbb{Z}A^{Mod}$, alors A est appelé groupe de dualité de poincaré, noté PD_k.

* si $C = \mathbb{Z}$, alors A est un PD_k groupe orientable

Remarques :

* les groupes fondamentaux des k-variétés fermé (orientable) asphérique sont des PD_k (orientable) groupe.

* il ya plusieur groupe de dualité qui ne sont pas des PD_k groupe tels que :

  - les groupes des noeuds
  - Le groupe solitaire de Baumslag.

Proposition 1 : i) Soit $1 \to B \to G \to A \to 1$ une extension de groupe dans laquelle A et B sont des groupe de dualité de dimension respectives l et k, alors : G un groupe de dualité de dimension $l+k$.

ii) En particulier, si A et B sont deux groupes de dualité, alors la suite $1 \to A \to A \times B \to B \to 1$ vérifie les condition de l'assertion ci-dessus, d'où :

$$cd(A \times B) = cd(A) + cd(B)$$

Proposition 2 : si A est un PD_k groupe orientable et B un groupe quelconque, alors $cd(A \times B) = cd(A) + cd(B)$

Exemples de calcul de $TC(G)$:

Exemple 1 : 1) Le groupe d'Artin à angle droit

à chaque graphe fini simple, on peut associer un groupe d'Artin à angle droit, noté G_Γ comme suit :

G_Γ possède une presentation finie avec les generateurs sont les x_i qu'on associe aux sommet $v_i \in V(\Gamma)$ et les relations : $x_i x_j = x_j x_i$ associé à chaque arrête $\{v_i, v_j\} \in E(\Gamma)$

càd G_Γ possède une presentation pour laquelle les relations sont les commutateurs

Théorème : Pour chaque graphe simplécial fini Γ, la complexité topologique associé au groupe d'Artin à angle droit G_Γ est donnée par :

$$TC(G_\Gamma) = z(\Gamma) \quad \text{où}$$

$$z(\Gamma) = \max_{K_1, K_2} |V(K_1) \cup V(K_2)| \quad \text{avec } K_i \text{ un clique de } \Gamma$$

Remarque :

* un clique K_i est un sous graphe complet de Γ
* on confond en général un clique avec l'ensembles de ses sommets et on ecrit $K = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ et $|K| = m$
* on peut choisir dans le théoreme ci-dessus, les deux cliques K_1 et K_2 tel que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

Proposition : soit K_1 et K_2 deux cliques disjoint de Γ, alors

$$TC(G_\Gamma) \geqslant |K_1| + |K_2|$$

Preuve. on suppose que $K_1 = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ et $K_2 = \{v_{j_1}, \dots, v_{j}\}$ sont deux cliques disjoints de Γ, et on pose $A = \langle x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \rangle$ et $B = \langle x_{j_1}, \dots, x_{j_n} \rangle$ les sous groupes abélien libre engendré par les generateurs de G_Γ. L'inclusion $i : B \hookrightarrow G_\Gamma$ admet une retraction $\varphi : G_\Gamma \longrightarrow B$; si $v_j \notin B$: $x_j \longrightarrow 0$ et si $v_i \in K_2$: $x_i \longrightarrow x_i$

Notons qu'on a : $\forall g \in G_\Gamma$: $\varphi(gAg^{-1}) = \{1\}$, donc

$$\forall g \in G_\Gamma : \quad gAg^{-1} \cap B = \{1\}$$

et d'après le théorème principal on a :

$$TC(G_\Gamma) \geqslant cd(A \times B)$$

or : $A \simeq \mathbb{Z}^n$ et $B \simeq \mathbb{Z}^m$ et $0 \to \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^m \to 1$

est une suite exacte et $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{Z}^m$ sont des groupe de dualité de dimension respectif n et m, donc $cd(A \times B) = cd(A) + cd(B)$

$$cd(A \times B) = |K_1| + |K_2|$$

donc $TC(G_\Gamma) \geqslant cd(A \times B)$