

Casablanca, le 07/01/2017,

Pr. Hilali

Cours 3 Construction de $A_{PL}(X)$

1) Type d'homotopie rationnelle

X et Y sont dits de même type d'homotopie rationnelle on le note $X \sim_{\mathbb{Q}} Y$ ssi $\exists f: X \rightarrow Y$ f appelée "équivalence d'homotopie rationnelle" telle que l'une des 4 propriétés équivalentes est vérifiée :

(i) $f_*: \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(Y) \otimes \mathbb{Q}$ isomorphisme

(ii) $f_*: H_*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(Y; \mathbb{Q})$ isomorphisme

(iii) $f^*: H^*(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$ isomorphisme

(iv) $f_{\mathbb{Q}}: X_{\mathbb{Q}} \rightarrow Y_{\mathbb{Q}}$ équivalence faible

Problème. Trouver le type d'homotopie rationnelle d'un espace.

Approche: Créer un pont entre la topologie (rationnelle) et l'algèbre. Plus précisément:

$$X \xrightarrow{\text{associe}} \text{algèbre diff graduée comm (adgc)} A_{PL}(X)$$

modèle $\uparrow$
($1V, d$)

où $V \otimes \mathbb{Q}$ espace vectoriel gradué

muni d'une différentielle $d: V \rightarrow 1^+V \otimes 1^+V$

$$1V = \{ \sum v_i \cdot 1 \cdots 1 v_i \}$$

$$v_i \cdot 1 v_j = (-1)^{|v_i||v_j|} v_j \cdot 1 v_i$$

$$\begin{cases} \varepsilon_i \cdot |v_i| \text{ pair} \Rightarrow v_i \cdot 1 v_i = v_i^2 \\ \varepsilon_i \cdot |v_i| \text{ impair} \Rightarrow v_i \cdot 1 v_i = 0 \end{cases} \quad (\varepsilon_i: v_i \neq 0)$$

$$V^{\text{pair}} = P, \quad V^{\text{impair}} = Q$$

$$1V = \left\{ \sum_{v_i \in P, v_j \in Q} p_{i_1 \dots i_p} (v_{i_1}, \dots, v_{i_p}) v_j \cdot 1 \cdots 1 v_j \right\}$$

où $p_{i_1 \dots i_p} \in \mathbb{Q}[P]$, $v_j \in Q$

$$1V = \mathbb{Q} \oplus 1^1V \oplus 1^2V \oplus 1^3V \oplus \dots \oplus 1^nV \oplus \dots$$

$$1^1V = 1^{\geq 2}V$$

$$d^2 = 0$$

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta$$

2 choses à construire $\begin{cases} \cdot A_{PL}(X) \\ \cdot (1V, d) \end{cases}$

La construction de $A_{PL}(X)$

provient des formes différentielle sur les variétés.
Comment alors définir des formes différentielle sur

(2) Construction de $A_{PL}(X)$

Soit X la réalisation d'un complexe simplicial K .

$$K = \{\sigma; \sigma \text{ simplexe de } \mathbb{R}^N\}$$

Si X est un espace topologique $\sigma: \Delta^n \xrightarrow{\text{continue}} Y$

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in [0, 1]^{n+1}; \sum t_i = 1\}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \\ 1 \end{array} \Delta^0$$

$$\Delta^1$$

$$\Delta^2$$

$$1-1 \quad A_{PL}(\Delta^n)$$

$$\Delta_{PL}^p(\Delta^n) = \left\{ \sum_{i_1, \dots, i_p} p_{i_1, \dots, i_p} (t_0, \dots, t_n) dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_p} \right\}$$

$$p_{i_1, \dots, i_p} \in \mathbb{Q}[t_0, \dots, t_n]$$

$A_{PL}^p(\Delta^n)$ est l'espace des p -formes diff. à coefficients polynômiaux.

$$1-2 \quad A_{PL}(X)$$

$$X = |K| \text{ ou } K = \{\sigma; \sigma \text{ simplexe}\}$$

$$A_{PL}^p(X) = \{(\omega_\sigma)_{\sigma \in K}; \omega_\sigma \in A_{PL}^p(\sigma)\}$$

Si $\sigma_i < \sigma$ (face de σ) alors $\omega_{\sigma_i} = \omega_\sigma|_{\sigma_i}$

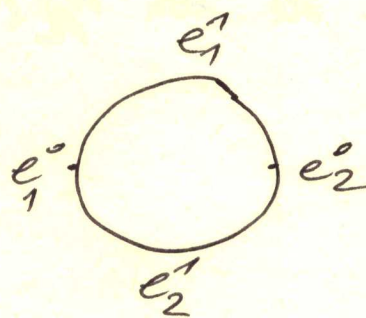
Dans le cas de variétés $\omega \in \Omega^p(M)$

$$\text{Soit } \mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}\}, \quad \omega = (\omega_i)_{i \in I}$$

$$\omega_i | \sigma_i \cap \sigma_j = \omega_j | \sigma_i \cap \sigma_j$$

Example $X = S^1$

$$X = |K|, \quad K = \{e_1^0, e_2^0, e_1^1, e_2^1\}$$



$$\omega \in A_{PL}^0(X)$$

$$\omega = (f_1^0, f_2^0, f_1^1, f_2^1)$$

$$f_i^1(t_0, t_1) = P_i(t_0, 1-t_0)$$

$$P_i \in \mathcal{Q}[t_0, t_1]$$

$$f_i^1(0, 1) = f_i^0(1)$$

$$\omega \in A_{PL}^1(X)$$

$$\omega = (\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_1^1, \omega_2^1) = (0, 0, \omega_1^1, \omega_2^1)$$

$$\omega_i^1 = P_i(t_0, 1-t_0) dt_0$$

$$\begin{cases} P_1(0, 1) = P_2(0, 1) \\ P_1(1, 0) = P_2(1, 0) \end{cases}$$

$$A_{PL}(X) = \bigoplus_P A_{PL}^P(X)$$

$A_{PL}(X)$ est une adgc

$$\omega = (\omega_\sigma)_{\sigma \in K}, \quad \omega' = (\omega'_\sigma)_{\sigma \in K}$$

$$f\omega = (f\omega_\sigma)$$

$$\omega + \omega' = (\omega_\sigma + \omega'_\sigma)_\sigma$$

$$\omega \wedge \omega' = (\omega_\sigma \wedge \omega'_\sigma)_\sigma$$

$$d\omega = (d\omega_\sigma)_\sigma$$

$$\text{Si } K' \text{ sous-complexe de } K \quad A_{PL}(K) \rightarrow A_{PL}(K') \rightarrow 0$$

(3) Modèle de Sullivan

Soit (A, d_A) une adgc.

Def: Un modèle de Sullivan de (A, d_A) est la donnée d'une adgc libre $(\Lambda V, d)$ et $f: (\Lambda V, d) \rightarrow (A, d_A)$ quasi-isomorphisme

$$f_*: H^*(\Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} H^*(A, d_A)$$

$$\dots \rightarrow (\Lambda V)^n \xrightarrow{d_n} (\Lambda V)^{n+1} \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow A^n \xrightarrow{d_A} A^{n+1} \rightarrow \dots$$

Définition. Un modèle de Sullivan de X est un modèle de son $A_{PL}(X)$.