

HOMOTPIE ET SUITE SPECTRALE D'UNE FIBRATION

PROBLEMATIQUES:

Soit $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ une fibration telle que F et B sont elliptiques

- 1/ Si F et B vérifient tous les deux la conjecture H, quelles sont les conditions que doit satisfaire la fibration pour que E vérifie aussi la conjecture H. (problème ouvert de Micheline Vigné)
- 2/ Si F vérifient la CRT, quelles sont les conditions que doit satisfaire la fibration pour que E vérifie aussi la CRT.

UN RESULTAT DE HILALI

On dit qu'une fibration

$$F \rightarrow X \rightarrow B$$

vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ si et seulement si:

- (i) $\pi_{\text{pair}}(F) \otimes \mathbb{Q} = 0$, et F est elliptique
- (ii) $\dim H^*(\Omega B; \mathbb{Q}) < \infty$
- (iii) X est elliptique, et

$$\pi_{2n}(X) \otimes \mathbb{Q} \neq 0, \text{ et } \pi_{2r+1}(X) \otimes \mathbb{Q} \neq 0 \Rightarrow n \leq r.$$

Théorème C. Soit (F, X, B) une fibration vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$. Alors on a:

$$F \text{ vérifie CRT} \Rightarrow X \text{ vérifie CRT.}$$

FIBRATION

Définition Une application continue, $p: E \rightarrow B$, est une fibration si, pour tout $n \geq 0$ et pour tout diagramme commutatif d'applications continues,

$$\begin{array}{ccc} I^n \times \{0\} & \xrightarrow{f_0} & E \\ j_0 \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

il existe une application continue $\tilde{f}: I^n \times I \rightarrow E$ telle que $p \circ \tilde{f} = f$ et $\tilde{f} \circ j_0 = f_0$.

En appliquant la propriété de relèvement pour $n = 0$, on constate que l'image $p(E)$ est une réunion de composantes connexes par arcs. Ainsi, l'application p est surjective si l'espace B est connexe par arcs.

Exemples :

1. Notons $p_F: B \times F \rightarrow F$ et $p_B: B \times F \rightarrow B$ les deux projections canoniques d'un produit. Pour tout espace F , la projection p_B est une fibration, de fibre F , appelée *fibration triviale*, le relèvement $\tilde{f}$ étant définie par $\tilde{f}(x, t) = (f(x, t), p_F(f_0(x, 0)))$.
2. Tout revêtement est une fibration.

Définition Soit (B, b_0) un espace pointé. Un fibré localement trivial de base B et de fibre F est une application continue $p: E \rightarrow B$ vérifiant la propriété suivante : il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de B et des homéomorphismes $\Phi_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$, tels que $p_{U_i} \circ \Phi_i = p$,

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times F \\ & \searrow p & \swarrow p_{U_i} \\ & U_i & \end{array}$$

Les ouverts U_i sont dits trivialisants. L'espace E s'appelle l'espace total, l'espace B la base, l'espace F la fibre et l'application p la projection.

GROUPES D'HOMOTOPIE D'ORDRE SUPERIEUR

DÉFINITION 1.5. Soit I^n l'hypercube unitaire en dimension n , c'est-à-dire $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$. Le bord ∂I^n de I^n est le sous-espace de tous les points avec au moins une coordonnée égale à 0 ou 1. Pour un espace X avec un point de base $x_0 \in X$, on définit $\pi_n(X, x_0)$ comme étant l'ensemble des classes d'homotopie des applications $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, où les homotopies f_t doivent satisfaire $f_t(\partial I^n) = x_0$ pour tout t .

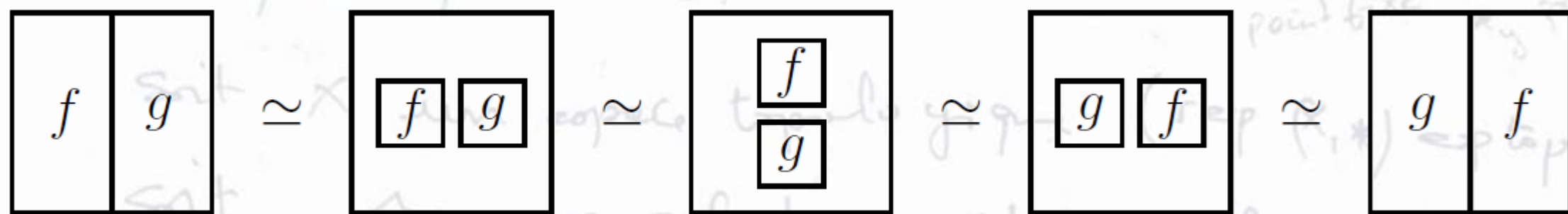
On peut étendre la définition au cas $n = 0$ en prenant I^0 comme étant un point et donc ∂I^0 , étant l'ensemble vide, alors $\pi_0(X, x_0)$ est l'ensemble des composantes connexes de X .

Pour $n \geq 2$, une opération de somme dans $\pi_n(X, x_0)$, généralisant l'opération de composition dans π_1 , est définie par

$$(f + g)(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Il est clair que cette somme est bien définie sur les classes d'homotopie. Comme la première composante est la seule impliquée dans l'opération de sommation, le raisonnement utilisé pour π_1 montre que $\pi_n(X, x_0)$ est un groupe. L'élément neutre étant l'application constante qui envoie I^n sur x_0 et les inverses étant donnés par $-f(s_1, s_2, \dots, s_n) = f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$.

On utilise la notation additive pour l'opération de groupe, car $\pi_n(X, x_0)$ est abélien pour $n \geq 2$, c'est-à-dire, $f + g \simeq g + f$. On peut s'en convaincre en considérant l'homotopie représentée sur ce graphique.



Dans un premier temps, on réduit les domaines de f et de g en de plus petits sous-cubes de I^n , la région hors de ces sous-cubes étant mise en correspondance avec le point de base. Ensuite, on peut déplacer ces sous-cubes, qui restent disjoints, ainsi si $n \geq 2$, on peut interchanger leurs positions. Finalement, les domaines de f et g peuvent être agrandis pour retrouver leur taille d'origine.

On peut noter que les applications $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ sont les mêmes que les applications du quotient $I^n / \partial I^n = S^n$ vers X prenant $s_0 = \partial I^n / \partial I^n$ comme point de base x_0 . Ainsi, on peut aussi voir $\pi_n(X, x_0)$ comme les classes d'homotopie des applications $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$, où les homotopies sont considérées à travers des applications de la même forme $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$.

for more physics and applications, continues.

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}	π_{16}
S^1	Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	0	Z	Z	Z_2	Z_2	Z_{12}	Z_2	Z_2	Z_3	Z_{15}	Z_2	Z_2^2	$Z_{12} \times Z_2$	$Z_{84} \times Z_2^2$	Z_2^2	Z_6
S^3	0	0	Z	Z_2	Z_2											
S^4	0	0	0	Z	Z_2	Z_2	$Z \times Z_{12}$	Z_2^2	Z_2^2	$Z_{24} \times Z_3$	Z_{15}	Z_2	Z_2^3	$Z_{120} \times Z_{12} \times Z_2$	$Z_{84} \times Z_2^5$	Z_2^6
S^5	0	0	0	0	Z	Z_2	Z_2	Z_{24}	Z_2	Z_2	Z_2	Z_{30}	Z_2	Z_2^3	$Z_{72} \times Z_2$	$Z_{504} \times Z_2^2$
S^6	0	0	0	0	0	Z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	Z	Z_2	Z_{60}	$Z_{24} \times Z_2$	Z_2^3	$Z_{72} \times Z_2$
S^7	0	0	0	0	0	0	Z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{120}	Z_2^3	Z_2^4
S^8	0	0	0	0	0	0	0	Z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	$Z \times Z_{120}$	Z_2^4
S^9	0	0	0	0	0	0	0	0	Z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{240}

classification:

S^n	π_n	π_{n+1}	π_{n+2}	π_{n+3}	π_{n+4}	π_{n+5}	π_{n+6}	π_{n+7}	π_{n+8}	π_{n+9}	π_{n+10}	π_{n+11}	π_{n+12}	π_{n+13}	π_{n+14}	π_{n+15}
S^1	z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	z	z	Z_2	Z_2	Z_{12}	Z_2	Z_2	Z_3	Z_{15}	Z_2	Z_2^2	$Z_{12} \times Z_2$	$Z_{84} \times Z_2^2$	Z_2^2	Z_6	Z_{30}
S^3	z	Z_2	Z_2	Z_{12}	Z_2	Z_2	Z_3	Z_{15}	Z_2	Z_2^2	$Z_{12} \times Z_2$	$Z_{84} \times Z_2^2$	Z_2^2	Z_6	Z_{30}	Z_{30}
S^4	z	Z_2	Z_2	$Z \times Z_{12}$	Z_2^2	Z_2^2	$Z_{24} \times Z_3$	Z_{15}	Z_2	Z_2^3	$Z_{120} \times Z_{12} \times Z_2$	$Z_{84} \times Z_2^5$	Z_2^6	$Z_{24} \times Z_6 \times Z_2$	$Z_{2520} \times Z_6 \times Z_2$	Z_{30}
S^5	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	Z_2	Z_2	Z_2	Z_{30}	Z_2	Z_2^3	$Z_{72} \times Z_2$	$Z_{504} \times Z_2^2$	Z_2^3	$Z_6 \times Z_2$	$Z_6 \times Z_2$	$Z_{30} \times Z_2$
S^6	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	z	Z_2	Z_{60}	$Z_{24} \times Z_2$	Z_2^3	$Z_{72} \times Z_2$	$Z_{504} \times Z_4$	Z_{240}	Z_6	$Z_{12} \times Z_2$	$Z_{60} \times Z_6$
S^7	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{120}	Z_2^3	Z_2^4	$Z_{24} \times Z_2$	$Z_{504} \times Z_2$	0	Z_6	$Z_{24} \times Z_4$	$Z_{120} \times Z_2^3$
S^8	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	$Z \times Z_{120}$	Z_2^4	Z_2^5	$Z_{24}^2 \times Z_2$	$Z_{504} \times Z_2$	0	$Z_6 \times Z_2$	$Z_{240} \times Z_{24} \times Z_4$	$Z_{120} \times Z_2^5$
S^9	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{240}	Z_2^3	Z_2^4	$Z_{24} \times Z_2$	$Z_{504} \times Z_2$	0	Z_6	$Z_{16} \times Z_4$	$Z_{240} \times Z_2^3$
S^{10}	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{240}	Z_2^2	$Z \times Z_2^3$	$Z_{12} \times Z_2$	Z_{504}	Z_{12}	Z_6	$Z_{16} \times Z_2$	$Z_{240} \times Z_2^2$
S^{11}	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{240}	Z_2^2	Z_2^3	$Z_6 \times Z_2$	Z_{504}	Z_2^2	$Z_6 \times Z_2$	$Z_{16} \times Z_2$	$Z_{240} \times Z_2$
S^{12}	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{240}	Z_2^2	Z_2^3	Z_6	$Z \times Z_{504}$	Z_2	$Z_6 \times Z_2$	$Z_{48} \times Z_4 \times Z_2$	$Z_{240} \times Z_2$
S^{13}	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{240}	Z_2^2	Z_2^3	Z_6	Z_{504}	0	Z_6	$Z_{16} \times Z_2$	$Z_{480} \times Z_2$
S^{14}	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{240}	Z_2^2	Z_2^3	Z_6	Z_{504}	0	$Z \times Z_3$	$Z_8 \times Z_2$	$Z_{480} \times Z_2$
S^{15}	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{240}	Z_2^2	Z_2^3	Z_6	Z_{504}	0	Z_3	$Z_4 \times Z_2$	$Z_{480} \times Z_2$
S^{16}	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{240}	Z_2^2	Z_2^3	Z_6	Z_{504}	0	Z_3	Z_2^2	$Z \times Z_{480} \times Z_2$
S^{17}	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{240}	Z_2^2	Z_2^3	Z_6	Z_{504}	0	Z_3	Z_2^2	$Z_{480} \times Z_2$
S^{18}	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{240}	Z_2^2	Z_2^3	Z_6	Z_{504}	0	Z_3	Z_2^2	$Z_{480} \times Z_2$
S^{19}	z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{240}	Z_2^2	Z_2^3	Z_6	Z_{504}	0	Z_3	Z_2^2	$Z_{480} \times Z_2$

SUITE EXACTE LONGUE D'HOMOTOPIE D'UNE FIBRATION

Théorème Si $p: E \rightarrow B$ est une fibration, on a une suite exacte longue,

$$\dots \longrightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{\pi_n(p)} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \longrightarrow \dots$$

dans laquelle $e_0 \in E$, $b_0 \in B$, $p(e_0) = b_0$ et i est l'injection canonique de $F = p^{-1}(b_0)$ dans E .

Remarquons que cette suite se termine par

$$\pi_1(B, e_0) \longrightarrow \pi_0(F, 0) \longrightarrow \pi_0(E, e_0) \longrightarrow \pi_0(B, b_0),$$

où les trois derniers éléments sont des ensembles et non des groupes. Par définition, l'exactitude d'une suite d'ensembles pointés $(A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c)$ signifie $\text{Im } f = g^{-1}(c)$.

Proposition

Pour tout $n \geq 1$, on a $\pi_n(S^n) \neq 0$.

Démonstration. Toute application $f: S^n \rightarrow S^n$, homotope à une application constante, induit une application nulle en homologie. L'application induite par l'identité sur S^n étant l'identité sur $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, on conclut que l'identité sur S^n n'est pas homotopiquement nulle. A fortiori, elle n'est pas homotopiquement nulle en tant qu'application de paires, de (S^n, s_0) dans (S^n, s_0) . Le groupe $\pi_n(S^n)$ contient donc des éléments non nuls.

Appliquons ce résultat à la fibration de Hopf, $p: S^3 \rightarrow S^2$, de fibre S^1 . La suite exacte longue associée et la détermination ci-dessus des groupes d'homotopie de S^1 impliquent

$$\pi_3(S^2) = \pi_2(S^2) \neq 0.$$

SUITE SPECTRALE

Dans cette section, on se fixe une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

Définition. Une suite spectrale dans $\mathcal{A}$ est une famille $(E_r^{p,q})_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ p,q \in \mathbb{Z}}}$ d'objets de $\mathcal{A}$, et la donnée, sur la famille $(E_r^{\bullet,\bullet})$, appelée la r -ième page de la suite spectrale, de différentielles $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$ telles que $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$ et

$$E_{r+1}^{p,q} \simeq \frac{\ker d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}}{\operatorname{im} d_r^{p-r,q+r-1} : E_r^{p-r,q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q}}$$

Si les $E_r^{p,q}$ sont tous isomorphes pour $r \gg 0$, on dit que la suite spectrale dégénère en page r à l'emplacement (p, q) . Si la suite spectrale dégénère pour tous indices (p, q) , on dit qu'elle converge, et on note $E_\infty^{p,q}$ l'objet $E_r^{p,q}$ pour $r \gg 0$ (qui est bien défini à isomorphisme près).

Plus généralement, une suite spectrale avec conventions homologiques est la donnée d'une suite de complexes bigradués $(E_{**}^r)_{r \geq 1}$ suivant la convention précédente et telle que pour tout $r \geq 1$,

$$E_{p,q}^{r+1} = \text{Ker}(d_{p,q}^r) / \text{Im}(d_{p+r-1,q-r}^r).$$

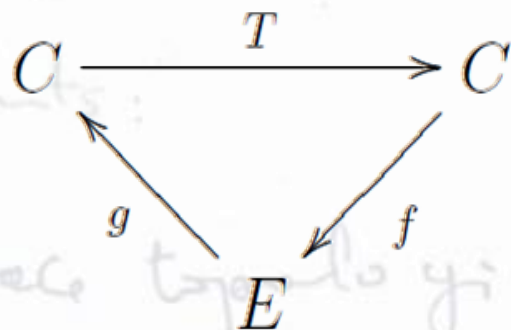
Autrement dit, chaque page de la suite spectrale est obtenue comme l'homologie de la page précédente (de manière compatible aux bidegrés).

$$(x \sim y \iff \exists A \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset\} \text{ s.t. } (x,y) \in A^2)$$

$\mathcal{P}$ est l'ensemble des classes.

definition: $X/\sim$

Définition. Un couple exact est la donnée de deux objets C et E , et d'un diagramme



tel que toute suite de deux flèches est exacte, i.e.

$$\ker f = \operatorname{im} T, \quad \ker g = \operatorname{im} f, \quad \ker T = \operatorname{im} g.$$

Proposition Soit $(C, T; E, f, g)$ un couple exact. La composée $fg : E \rightarrow E$ vérifie $(fg)^2 = 0$, et munit E d'une structure différentielle.

- Remarque* = 1. La plupart des (sinon toutes les) suites spectrales connues sont associées à un couple exact bien choisi, bien qu'il existe d'autres méthodes pour construire des suites spectrales. La plus notable est celle des complexes filtrés. On renvoie à [McC01] pour une présentation de cette deuxième approche et pour la comparaison avec l'approche des couples exacts.
2. Certaines suites spectrales (par exemple la suite spectrale de Leray) commence au terme E_2 . Il s'agit là d'une convention car on peut toujours renuméroter une suite spectrale pour qu'elle commence à partir d'un rang arbitraire, mais cette convention à sa raison d'être. Dans ce cas-là, la suite spectrale est associée à un couple exact de degré 1.

SUITE SPECTRALE D'UNE FIBRATION

Considérons une fibration $p : E \rightarrow B$ au sens de Serre telle que B est un CW-complexe connexe par arc. Soit F la fibre de p pour un point base arbitrairement choisi.

On définit une filtration sur E en posant :

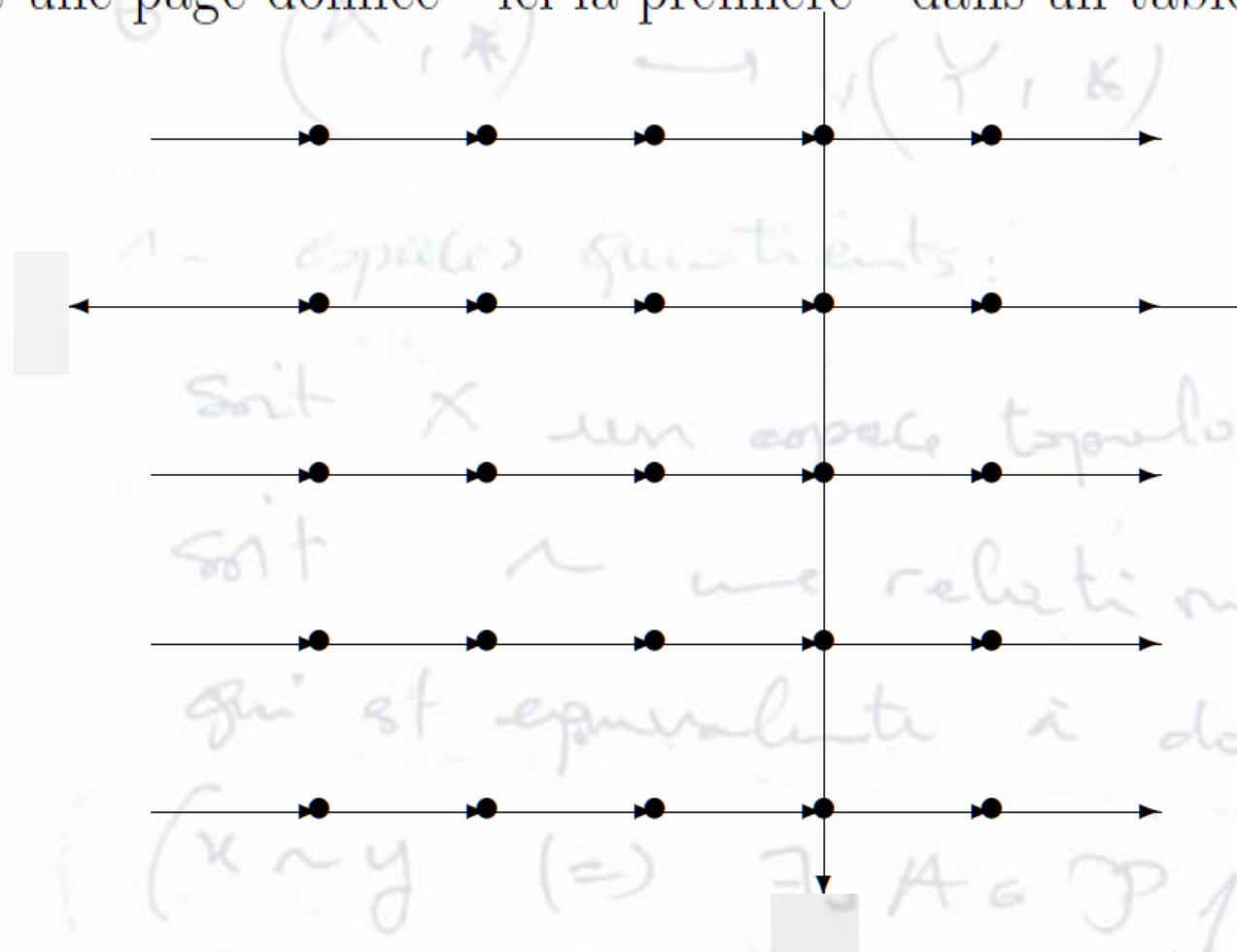
$$E^n = p^{-1}(B^{(n)})$$

où $B^{(n)}$ est le n -squelette de B .

Considérons H_* la théorie d'homologie singulière. On associe donc à cette filtration un couple exact et une suite spectrale qui converge d'après la proposition précédente et qui a la forme suivante :

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(E^p, E^{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(B).$$

VI.1.13. — *Représentations des suites spectrales.*— On représente les suites spectrales en inscrivant une page donnée - ici la première - dans un tableau de la forme suivante :



Le point en coordonnée (p, q) représente le groupe $E_{p,q}^1$ les flèches indiquent les différentielles. En général, on s'intéresse aux régions dans laquelle les groupes $E_{p,q}^1$, ou éventuellement les flèches $d_{p,q}^1$ sont nulles.

(p, q)

$(p + r, q - r + 1)$

d_r

Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, nous dirons la suite spectrale dégénère en $E_{p,q}^n$ si pour tout $r \geq n$, $d_{p,q}^r = 0$. En particulier, $E_{p,q}^{r+1} = E_{p,q}^r$ et nous poserons alors :

$$E_{p,q}^\infty := E_{p,q}^n.$$

De plus nous utiliserons la terminologie suivante :

- la suite spectrale dégénère en (p, q) s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que la suite spectrale dégénère en $E_{p,q}^n$;
- la suite spectrale dégénère en E^n si pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, la suite spectrale dégénère en $E_{p,q}^n$;
- la suite spectrale dégénère faiblement si elle dégénère en tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$;
- la suite spectrale dégénère (fortement) s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que la suite spectrale dégénère en E^n .

Théorème — Supposons que B est simplement connexe.

Alors la suite spectrale associée à la fibration $p: E \rightarrow B$ et à la théorie homologique H_* est une suite spectrale convergente qui a la forme suivante :

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, H_q(F)) \Rightarrow H_{p+q}(E).$$

Théorème d'Hurewicz. — On peut déduire de la suite spectrale d'une fibration et de l'isomorphisme pour X connexe par arc :

$$\pi_1(X)^{ab} \xrightarrow{\text{sim}} H_1(X, \mathbb{Z})$$

le théorème d'Hurewicz :

Théorème (Hurewicz). — Soit $n > 1$ un entier et X un espace pointé $(n-1)$ -connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique :

$$h_n : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X, \mathbb{Z}).$$

Theorem 5.4 (Leray–Serre). *Let $F \rightarrow E \rightarrow B$ be a fibration in which B is a connected CW complex with $\pi_1(B)$ acting trivially on the cohomology of the fiber. Then there is a spectral sequence $\{E_r^{p,q}\}$ in which*

$$E_1^{p,q} = C^p(B, H^q(F)) \text{ and } d_1 = \text{coboundary map of } C^*(B, H^q(F));$$

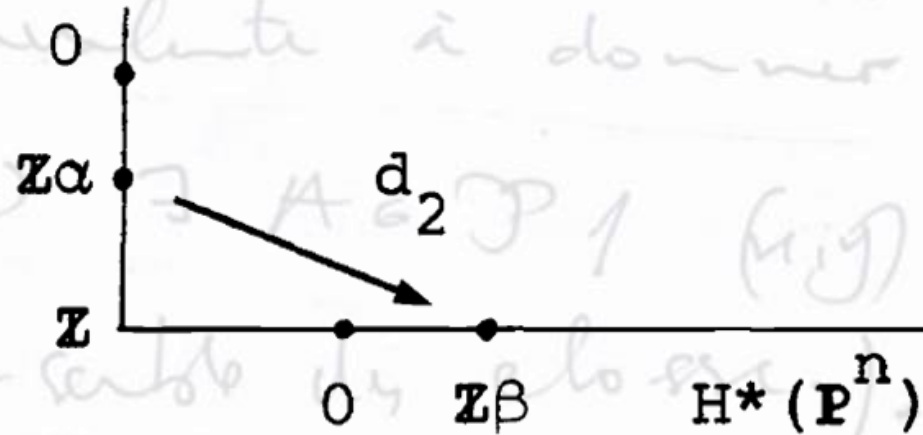
$$E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F)); \text{ and}$$

$$E_N^{p,q} = \frac{\ker\{H^{p+q}(E) \rightarrow H^{p+q}(E^{(p-1)})\}}{\ker\{H^{p+q}(E) \rightarrow H^{p+q}(E^{(p)})\}}, \quad N > p, q + 1.$$

EXAMPLE

Complex Projective Space. We shall compute the cohomology ring of $\mathbb{CP}^n = \mathbb{P}^n$ using the *Hopf fibration* $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n$.

Using $\mathbb{Z}$ -coefficients, the E_2 term is $H^*(S^1) \otimes H^*(\mathbb{CP}^n)$ and $E_\infty \Rightarrow H^*(S^{2n+1})$. Since $H^q(S^1) = 0$ for $q > 1$, $E_2^{p,q} = 0$ for $q > 1$ and so $d_3 = d_4 = \dots = 0$ and $E_3 \cong E_4 \cong \dots \cong E_\infty$. Thus, all the “action” in the spectral sequence occurs at the E_2 level, and in particular $E_\infty^{p,q} = E_3^{p,q} = 0$ unless $p + q = 0, 2n + 1$. The picture of E_2 is



where $\alpha \in E_2^{0,1} \cong H^1(S^1)$ is a generator.

To begin with, $E_2^{1,0} = 0$ since $E_\infty^{1,0} \cong E_2^{1,0}$. Next the map

$$E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0}$$

is an isomorphism since $E_3^{p,q} = 0$ for $1 \leq p + q \leq 2$. Set $\beta = d_2\alpha$ so that $E_2^{2,1} \cong \mathbb{Z}(\alpha \otimes \beta)$. Then $d_2(\alpha \otimes \beta) = -\beta^2 \in E_2^{4,0} \cong H^4(\mathbb{P}^n)$ since d_2 is a derivation. Continuing in this way, we see that

$$H^{2q}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[\beta^q] \quad (q \leq n)$$

$$H^{2q+1}(\mathbb{P}^n) = 0$$

So that $H^*(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}[\beta]/(\beta^{n+1})$; i.e., $H^*(\mathbb{P}^n)$ is a truncated polynomial algebra.

Sujet de recherche:

Construire la suite spectrale de Leray-Serre permettant de résoudre la CRT ou la conjecture de Hilali.

... morphismes et les applications continues.

$$f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \kappa) \quad \text{et} \quad f(x) = x \quad ??$$

• A suivre....

... quotients:

$x_i = x_j$?
point fixe x_i point basculant
 x_j point basculant

Soit X un espace topologique (rep (X, τ) est top. part.)

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X

qui est équivalente à donner une partition $\mathcal{P}$ de X

$$(x \sim y \iff \exists A \in \mathcal{P} \quad (x, y) \in A^2)$$

$\mathcal{P}$ est l'ensemble des classes.

définition : $X/\sim$