Invariants numériques en homotopie rationnelle
UIR 04/03/2017

1. **Motivation**

La plus part des invariants numériques en homotopie rationnelle sont introduits pour encadrer la LS-catégorie. Rappelons que Dans l'*analyse situs* A. Poincaré stipule que l'existence et la forme des solutions des équations différentielles est en liaison avec la topologie de l'espace ambiant (espace dans lequel, léquations trouve sa définition normale). Ceci a conduit à l'introduction de la notion de variétésainsi que d'autres méthodes en analyse.

Entre temps, un problème de base apparu: Comment lier la complexité des flots à celle de la topologie des variétés ambiantes.

Pour le flot gradient en particulier, il s'agissait d'estimer le nombre des points invariants du flot. Ce problème est équivalent à l'estimation du nombre minimal des points critiques d'une fonction sur une variété M.

La théorie de Morse a apporté une réponse dans le cas particulier des fonctions ayant des points critiques non-dégénérés (fin des années 20 et début des années 30).

Au même moment, L. Lusternik et L. Schnirelmann ont introduit l'invariant homotopique $cat(M)$ dans le but de trouver une borne inférieur au nombre des points critiques pour une fonction quelconque sur la variété M.

Cette approche de nature analytique a trouvé des applications inattendues en géométrie: A l'aide de cet invariant, ils ont montré l'existence de trois géodésiques fermées sur la variété S^2.

En 1941, R. H. Fox a donné une formulation de cet invariant, qui a permit son introduction parmi les recherches des spécialiste en topologie algébrique: G. W. Whitehead, T. Ganea,

Enfin avec les modèles minimaux de D. Sullivan (surtout et ceux de D. Quillen) en homotopie rationnelle, d'autres approximations de la LS-catégorie sont définies et ont donné des applications en géométrie, en algèbre locale et dans l'étude des algèbres de Lie.

Plus récemment la complexité topologique d'un espace introduite par M. Farber est une renaissance de la LS-catégorie.

Plan du cours:

I) Définition et premières approximations de la LS-catégorie: $cup_{\mathbb{K}}(X)$ et $dim(X)/r$,
II) Formulation T. Ganea,
III)La LS-catégorie rationnelle,
IV)L'invariant de Toomer: $e_{\mathbb{K}(X)}$ (minorant de $cat(X)$,
V) Les invariants algèbriques $depth(H_*(\Omega X, \mathbb{K})$ et $gldim(H_*(\Omega X, \mathbb{K})$.

Référence:

[1] O. Cornea, G. Lupton and D. Tanré, Lusternik-Schnirelmann Category, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 103, (2003).

[2] Y. Félix, S. Halperin and J.C. Thomas, Rational Homotopy Theory, GTM, 205, Springer, (2001).

2. Définition et premières approximations de la LS-catégorie: $cup_{\mathbb{K}}(X)$ et $dim(X)/r$

Définition 2.0.1. *Un sous espace U d'un espace topologique X est dit contractile (dans X) en un point $x_0 \in X$, s'il existe $H : U \times I \to X$ (contraction de U dans X) continue tel que $H(u,0) = u$ et $H(u,1) = x_0$, $\forall u \in U$.*
Si $H : U \times I \to U$ on dit que U est contractile dans lui mme.

Définition 2.0.2. *La catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'un espace topologique X est le plus petit entier n tel qu'il existe un recouvrement $U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_{n+1}$ de X par des ouverts contractiles dans X. On la note $cat(X)$ et on dit que les U_i forment un recouvrement ouvert catégoriel de X*

Proposition 2.0.3. *cat(X) est un invariant homotopique*

Proof. Soit Y un espace homotope à X, $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ continues et telles que $Id_Y \simeq f \circ g$ ie. $\exists G : Y \times I \to Y$ continue telle que $G(y,0) = y$ et $G(y,1) = f \circ g(y)$, $\forall y \in Y$. Supposons que $cat(X) = n$ et soit $U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_{n+1}$ un recouvrement ouvert catégoriel de X. On pose $V_i = g^{-1}(U_i)$, $\forall i \in \{1, \ldots n+1\}$. Si $h_i : U_i \times I \to X$ désigne la contraction de U_i dans X, avec $h_i(u,0) = u$ et $h_i(u,1) = x_0$, la contraction de V_i en le point $y_0 = f(x_0) \in Y$ est définie comme suit:

$$k_i(v,t) = \begin{cases} G(v,2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(h_i(g(v),2t-1)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Par suite les V_i forment un recouvrement catégoriel de Y et par conséquent $cat(Y) \leq n = cat(X)$. L'autre inégalité se démontre de la mme faon en utilisant l'homotopie entre $g \circ f$ et Id_X. □

2.1. Premières approximations.

Notons $\tilde{H}^*(X, \mathbf{R})$ l'homologie réduite d'un espace topologique X à coefficients dans un anneau commutatif $\mathbf{R}$. Le produit (cup) sur $\tilde{H}^*(X, \mathbf{R})$ est défini comme suit:

$$x \cup y = \triangle^*(x \times y) \in \tilde{H}^{i+j}(X, \mathbf{R})$$

pour tout $x \in \tilde{H}^i(X, \mathbf{R})$, $y \in \tilde{H}^j(X, \mathbf{R})$ où $\triangle : X \to X \times X$ désigne la diagonale et $x \times y$ le produit externe en cohomologie.

Notons

$$cup_{\mathbf{R}}(X) = nil(\tilde{H}^*(X, \mathbf{R})$$

(c.à.d. le plus petit entier k tel que tous les $(k+1)$-produits "*cup*" soient nuls dans $\tilde{H}^*(X, \mathbf{R})$). On a alors:

Theorème 2.1.1. *$cup_{\mathbf{R}}(X) \leq cat(X)$.*

Ainsi, on a une première minoration. Une première majoration est donnée en terme de dimension. Pour cela on a besoin de la formulation cat_{Wh} de Whitehead pour la LS-catégorie. Soit donc (X, x_0) un espace pointé, $T^{m+1}(X) = \{(x_1, \ldots, x_{m+1}) \mid \exists i,\ x_i = x_0\}$ et $\Delta_X : X \to X^{m+1}$ la diagonale.

Définition 2.1.2. *$cat_{Wh}(X) = inf\{m \mid \Delta_X$ est homotope à une application $f : X \to T^{m+1}(X)\}$ (ou ∞)*

Le théorème suivant montre que $cat(X) = cat_{Wh}(X)$ pour tout CW-complexe connexe par arcs:

Theorème 2.1.3. *Supposons que* (X, x_0) *est un espace topologique connexe par arcs,*

(1) *Si* X *est normal, alors* $cat_{Wh}(X) \leq cat(X)$.
(2) *Si*x_0 *est dans un ouvert contractile, alors* $cat(X) \leq cat_{Wh}(X)$.

Rappelons la définition d'un CW-complexe (fini).

Définition 2.1.4. *Un CW complexe de dimension* n *est un espace* X, *compact, tel qu'il existe une suite* $X^0 \subseteq X^1 \subseteq ... \subseteq X^n = X$ *de sous espaces fermés de* X *tels que*
(i) X^0 *est un ensemble fini de points.*
(ii) X^k *est homéomorphe à un espace obtenu par l'attachement à* X^{k-1} *d'un nombre fini de boules chacune de dimension* k.

Une première majoration de $cat(X)$ est donnée par:

Theorème 2.1.5. *Si* X *est un CW-complexe* $(r-1)$*-connexe* $(r \geq 1)$ *de dimension* n, *alors* $cat(X) \leq n/r$.

Rappelons qu'un espace est m-connexe s'il est connexe par arcs et ses groupes d'homotopie $\pi_i(X)$, $1 \leq i \leq m$ sont tous nuls.

Exemples (1) Un espace contractile X est de $cat(X) = 0$.
(2) La sphère $\mathbb{S}^n$ peut tre recouverte par deux hémisphères H^+ et H^- ouvertes et contractiles dans $\mathbb{S}^n$. Par conséquent $cat(\mathbb{S}^n) \leq 1$. Mais $H^*(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}a/(a^2)$, par le théorème précédent on a:

$$cat(\mathbb{S}^n) = 1.$$

(3) La cohomologie de tore $\mathbb{T}^n$ est une algèbre extérieure sur n générateurs par suite $cup_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}^n) = n$. D'autre part $\mathbb{T}^n$ étant un CW-complexe connexe par arcs de dimension n, alors par le théorème précédent on a $cat(\mathbb{T}^n) \leq n$. d' où

$$cat(\mathbb{T}^n) = n.$$

(4) $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\omega]/(\omega^{n+1})$ et puisque $\mathbb{C}P^n$ est simplement connexe et $\omega^n \neq 0$, alors $cup_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}P^n) = n$. Mais $\mathbb{C}P^n$ est 1-connexe et de dimension $2n$ (comme variété ou comme CW-complexe), par conséquent

$$cat(\mathbb{C}P^n) = n.$$