Invariants numériques en homotopie rationnelle

UIR 04/03/2017

1. **Motivation**

La plus part des invariants numériques en homotopie rationnelle sont introduits pour encadrer la LS-catégorie. Rappelons que Dans l'*analyse situs* A. Poincaré stipule que l'existence et la forme des solutions des équations différentielles est en liaison avec la topologie de l'espace ambiant (espace dans lequel l'équations trouve sa définition normale). Ceci a conduit à l'introduction de la notion de variétés ainsi qu'à d'autres méthodes en analyse.

Entre temps, un problme de base apparu: Comment lier la complexité des flots à celle de la topologie des variétés ambiantes.

Pour le flot gradient en particulier, il s'agissait d'estimer le nombre des points invariants du flot. Ce problème est équivalent à l'estimation du nombre minimal des points critiques d'une fonction sur une variété M.

La théorie de Morse a apporté une réponse dans le cas particulier des fonctions ayant des points critiques non-dégénérés (fin des années 20 et début des années 30).

Au même moment, L. Lusternik et L. Schnirelmann ont introduit l'invariant homotopique $cat(M)$ dans le but de trouver une borne infrieure au nombre des points critiques pour une fonction quelconque sur la variété M.

Cette approche de nature analytique a trouvé des applications inattendues en géométrie: A l'aide de cet invariant, ils ont montré l'existence de trois géodésiques fermées sur la variété S^2.

En 1941, R. H. Fox a donné une formulation de cet invariant, qui a permit son introduction parmi les recherches des spécialiste en topologie algébrique: G. W. Whitehead, T. Ganea,

Enfin avec les modèles minimaux de D. Sullivan (surtout et ceux de D. Quillen) en homotopie rationnelle, d'autres approximations de la LS-catégorie sont définies et ont donné des applications en géométrie, en algèbre locale et dans l'étude des algèbres de Lie.

Plus récemment la complexité topologique d'un espace introduite par M. Farber est une renaissance de la LS-catégorie.

Plan du cours:

I) Définition et premières approximations de la LS-catégorie: $cup_{\mathbb{K}}(X)$ et $dim(X)/r$,
II) Formulation T. Ganea,
III)La LS-catégorie rationnelle,
IV)L'invariant de Toomer: $e_{\mathbb{K}(X)}$ (minorant de $cat(X)$,
V) Les invariants algèbriques $depth(H_*(\Omega X, \mathbb{K})$ et $gldim(H_*(\Omega X, \mathbb{K})$.

Référence:

[1] O. Cornea, G. Lupton and D. Tanré, Lusternik-Schnirelmann Category, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 103, (2003).

[2] Y. Félix, S. Halperin and J.C. Thomas, Rational Homotopy Theory, GTM, 205, Springer, (2001).

2. Définition et premières approximations de la LS-catégorie: $cup_{\mathbb{K}}(X)$ et $dim(X)/r$

Définition . *Un sous espace U d'un espace topologique X est dit contractile (dans X) en un point $x_0 \in X$, s'il existe $H : U \times I \to X$ (contraction de U dans X) continue tel que $H(u,0) = u$ et $H(u,1) = x_0$, $\forall u \in U$.*
Si $H : U \times I \to U$ on dit que U est contractile dans lui mme.

Définition . *La catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'un espace topologique X est le plus petit entier n tel qu'il existe un recouvrement $U_1,\ U_2,\ \dots,\ U_{n+1}$ de X par des ouverts contractiles dans X. On la note $cat(X)$ et on dit que les U_i forment un recouvrement ouvert catégoriel de X*

Proposition . *cat(X) est un invariant homotopique*

Proof. Soit Y un espace homotope à X, $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ continues et telles que $Id_Y \simeq f \circ g$ ie. $\exists G : Y \times I \to Y$ continue telle que $G(y,0) = y$ et $G(y,1) = f \circ g(y)$, $\forall y \in Y$. Supposons que $cat(X) = n$ et soit $U_1,\ U_2,\ \dots,\ U_{n+1}$ un recouvrement ouvert catégoriel de X. On pose $V_i = g^{-1}(U_i)$, $\forall i \in \{1, \dots n+1\}$. Si $h_i : U_i \times I \to X$ désigne la contraction de U_i dans X, avec $h_i(u,0) = u$ et $h_i(u,1) = x_0$, la contraction de V_i en le point $y_0 = f(x_0) \in Y$ est définie comme suit:

$$k_i(v,t) = \begin{cases} G(v,2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f(h_i(g(v), 2t-1)) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Par suite les V_i forment un recouvrement catégoriel de Y et par conséquent $cat(Y) \le n = cat(X)$. L'autre inégalité se démontre de la mme faon en utilisant l'homotopie entre $g \circ f$ et Id_X. □

2.1. Premières approximations.

La première approximation est donnée par le produit *cup*.

Rappelons la définition de celui-ci dans le cadre général de deux espaces topologiques X et Y. Notons $T(X,Y) = S_*(X \times Y)$ le complexe singulier de $X \times Y$ et $T'(X,Y) = S_*(S) \otimes S_*(Y)$ le produit tensoriel de ceux de X et de Y. T et T' sont des bifoncteurs et d'aprés la formule de Kunneth, on a $H_0(X \times Y) \xrightarrow{\Phi} H_0(X) \otimes H_0(Y)$. Le théorème des modèles acycliques assure alors l'existence d'une équivalence de chaines $\phi : S_*(X \times Y) \to S_*(X) \otimes S_*(Y)$ et de son inverse $\phi' : S_*(X) \otimes S_*(Y) \to S_*(X \times Y)$

telle que $H_0(\phi) = \Phi$. En conséquence, on a un isomorphisme entre les homologies $H_k(S_*(X) \otimes S_*(Y))$ et $H_k(X \times Y)$, $k \geq 0$. la composée (qui est en fait un monomorphisme)

$$H_p(X) \otimes H_q(Y) \hookrightarrow H_{p+q}(S_*(X) \otimes S_*(Y)) \to H_{p+q}(X \times Y)$$

où la première application provient de la formule de Kunneth et la seconde est induite par ϕ', est appelée, *produit externe en homologie.*

Si G_1 et G_2 sont deux R-modules (R un anneau principal) et $\alpha_1 \in S^p(X, G_1)$ et $\alpha_2 \in S^q(Y, G_1)$, alors $\alpha_1 \times \alpha_2 = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \circ \phi : S_{p+q}(X \times Y) \to (S_*(S) \otimes S_*(Y))_{p+q} \to G_1 \otimes G_2$ défini un élément de $S^{p+q}(X \times Y, G_1 \otimes G_2)$, appelé *produit externe des cochaines.* Ce produit vérifie la relation suivante:

$$\delta(\alpha_1 \times \alpha_2) = \delta(\alpha_1) \times \alpha_2 + (-1)^p \alpha_1 \times \delta(\alpha_2).$$

En passant en cohomologie, on obtient le *produit externe en cohomologie*:

$$\times : H^p(X, G_1) \otimes H^q(Y, G_2) \to H^{p+q}(X \times Y, G_1 \otimes G_2)$$

donné par la formule $[\alpha_1] \otimes [\alpha_2] = [\alpha_1 \times \alpha_2]$.

Cas particulier: $X = Y$, $G_1 = G_2 = R$. Notons $\tilde{H}^*(X, \mathbf{R})$, l'homologie réduite d'un espace topologique X à coefficients dans un anneau commutatif principal $\mathbf{R}$. Le produit (cup) sur $\tilde{H}^*(X, \mathbf{R})$ est défini comme suit:

$$x \cup y = \triangle^*(x \times y) \in \tilde{H}^{i+j}(X, \mathbf{R})$$

pour tout $x \in \tilde{H}^i(X, \mathbf{R})$, $y \in \tilde{H}^j(X, \mathbf{R})$ où $\triangle : X \to X \times X$ désigne la diagonale de X.

Remarque . *En prenant pour ϕ l'équivalence de chaine d'Alexander-Whitney, on obtient une formulation explicite du produit cup (cf. [2], page 65).*

Notons

$$cup_{\mathbf{R}}(X) = nil(\tilde{H}^*(X, \mathbf{R})$$

(c.à.d. le plus petit entier k tel que tous les $(k+1)$-produits "*cup*" soient nuls dans $\tilde{H}^*(X, \mathbf{R})$). On a alors:

Théorème . *$cup_{\mathbf{R}}(X) \leq cat(X)$.*

Proof. Posons $cat(X) = n$ et soit $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ un recouvrement ouvert catégoriel de X. Supposons qu'il existe un produit $x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_{n+1} \neq 0$ dans $\tilde{H}^*(X, \mathbf{R})$. La suite exacte longue en cohomologie de la paire (X, U_i) $(1 \leq i \leq n+1)$ permet d'écrire $x_i = q_i^*(\tilde{x}_i)$ avec $q_i : X \hookrightarrow (X, U_i)$ et $\tilde{x}_i \in H^{n_i}(X, U_i, \mathbf{R})$. On applique par suite le produit cup géneralisé

$$\cup : H^p(X, A, \mathbf{R}) \times H^q(X, B, \mathbf{R}) \to H^{p+q}(X, A \cup B, \mathbf{R})$$

défini par $u \cup v = \Delta^*(u \times v)$ associé au triplet (X, A, B) avec $A \subseteq B \subseteq X$ et la diagonale $\Delta : (X, A \cup B) \to (X, A) \times (X, B) = (X \times X, A \times X \cup X \times B)$. Notons $q : X \to (X, A \cup B)$, $q_1 : X \to (X, A)$ et $q_2 : X \to (X, B)$, on vérifie aisément que $q^* \circ \Delta^* = \Delta^* \circ (q_1^* \times q_2^*)$. Ainsi si $q : X \to (X, \cup_{1 \le i \le n+1} U_i)$, on montre alors par récurrence que

$$q^*(\tilde{x}_1 \cup \tilde{x}_2 \cup \ldots \cup \tilde{x}_{n+1}) = q_1^*(\tilde{x}_1) \cup \ldots \cup q_{n+1}^*(\tilde{x}_{n+1}) = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_{n+1}.$$

Mais $X = \cup_{1 \le i \le n+1} U_i$ entraine que $\tilde{x}_1 \cup \tilde{x}_2 \cup \ldots \cup \tilde{x}_{n+1} = 0$. Ce qui est absurde et par conséquent $cup_{\mathbf{R}}(X) \le n$. $\square$

Ainsi, on a une première minoration. Une première majoration est donnée en terme de dimension. Pour cela on a besoin de la formulation cat_{Wh} de Whitehead pour la LS-catégorie. Soit donc (X, x_0) un espace pointé, $T^{m+1}(X) = \{(x_1, \ldots, x_{m+1}) \mid \exists i,\ x_i = x_0\}$ et $\Delta_X : X \to X^{m+1}$ la diagonale.

Définition . *$cat_{Wh}(X)$ est le plus petit entier k (ou ∞) tel qu'il existe une application $\Delta' : X \to T^{k+1}(X)$ qui rend le diagramme suivant, commutative à homotopie pr es:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta'} & T^{k+1}(X) \\ \Delta & \searrow & \downarrow \\ & & X^{k+1}. \end{array}$$

Le théorème suivant montre que $cat(X) = cat_{Wh}(X)$ pour tout CW-complexe connexe par arcs:

Théorème . *Supposons que (X, x_0) est un espace topologique connexe par arcs,*

(1) *Si X est normal, alors $cat_{Wh}(X) \le cat(X)$.*
(2) *Si x_0 est dans un ouvert contractile, alors $cat(X) \le cat_{Wh}(X)$.*

Rappelons la définition d'un CW-complexe (fini).

Définition . *Un CW complexe de dimension n est un espace X, compact, tel qu'il existe une suite $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \ldots \subseteq X^n = X$ de sous espaces fermés de X tels que*
(i) X^0 est un ensemble fini de points.
(ii) X^k est homéomorphe à un espace obtenu par l'attachement à X^{k-1} d'un nombre fini de boules chacune de dimension k.

Rappelons qu'un espace est m-connexe s'il est connexe par arcs et ses groupes d'homotopie $\pi_i(X)$, $1 \le i \le m$ sont tous nuls. Une première majoration de $cat(X)$ est donnée par:

Théorème . *Si X est un CW-complexe $(n-1)$-connexe $(n \ge 1)$, alors $cat(X) \le dim(X)/n$.*

Proof. Comme X est connexe par arcs, on peut supposer que X admet une unique cellule de dimension zéro; le point base x_0. D'autre part, les premires autres cellules sont nécessairement de dimension n (cf. Thépréme d'Hurewicz). De même, les premières cellules de X^{k+1} de degrés non nuls sont celles de dimension $n(k+1)$. Par suite X^{k+1} diffère de $T^{k+1}(X)$ partir de cette dimension. Il en résulte que pour k tel que $nk \leq dim(X) < n(k+1)$, le théorème d'approximation simpliciale, appliqué à Δ entraine l'existence de Δ' cellulaire homotope à Δ et donc (puisque $dim(X) < n(k+1)$), on a $j \circ \Delta'$ homotope à Δ. □

Exemples: (1) Un espace contractile X est de $cat(X) = 0$.
(2) La sphère $\mathbb{S}^n$ peut être recouverte par deux hémisphères H^+ et H^- ouvertes et contractiles dans $\mathbb{S}^n$. Par conséquent $cat(\mathbb{S}^n) \leq 1$. Mais $H^*(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}a/(a^2)$, par le théorème précédent on a:

$$cat(\mathbb{S}^n) = 1.$$

(3) La cohomologie de tore $\mathbb{T}^n$ est une algèbre extérieure sur n générateurs par suite $cup_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}^n) = n$. D'autre part $\mathbb{T}^n$ étant un CW-complexe connexe par arcs de dimension n, alors par le théorème précédent on a $cat(\mathbb{T}^n) \leq n$. d' où

$$cat(\mathbb{T}^n) = n.$$

(4) $H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\omega]/(\omega^{n+1})$ et puisque $\mathbb{C}P^n$ est simplement connexe et $\omega^n \neq 0$, alors $cup_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}P^n) = n$. Mais $\mathbb{C}P^n$ est 1-connexe et de dimension $2n$ (comme variété ou comme CW-complexe), par conséquent

$$cat(\mathbb{C}P^n) = n.$$

3. Formulation de Ganea

Avec les notations précédentes, considérons le pullback homotopique suivant:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}_n(X) & \xrightarrow{\delta} & T^{n+1}(X) \\ \tilde{p}_n \downarrow & & \downarrow j_{n+1} \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X^{n+1} \end{array}$$

avec $\tilde{G}_n(X) = \{(x, y, \gamma) \in X \times T^{n+1}(X) \times (X^{n+1})^I : \ \gamma(0) = \Delta(x), \ \gamma(1) = j_{n+1}(y)\}$. On a alors le résultat suivant:

Proposition . *Il existe une section $s : X \to \tilde{G}_n(X)$ de $\tilde{p}_n$ si et seulement si $cat(X) \leq n$.*

Remarque . (1) *$\tilde{G}_n(X)$ peut être obtenu en remplaons j_{n+1} par la fibration $\tilde{j}_{n+1}$ et prendre par suite le pullback ordinaire.*

(2) *On montre que* $\tilde{G}_0(X) \simeq P(X)$ *et que* $\tilde{G}_1(X) \simeq \Sigma\Omega(X)$*, les autres* $\tilde{G}_n(X)$ *sont identifiés aux espaces* $G_n(X)$ *obtenus par la fibre-cofibre construction appelée aussi la construction de Ganea (cf. Définition 1. 59. dans [1]).*

Théorème . *Pour tout* $n \geq 0$*, il existe un diagramme commutative à homotopie près:*

$$\begin{array}{ccc} G_n(X) & \overset{\simeq}{\to} & \tilde{G}_n(X) \\ p_n \searrow & & \swarrow \tilde{p}_n \\ & X & \end{array}$$

Il en résulte la définition équivalente suivante:

Définition . *(de Ganea pour la LS-catégorie): Soit* X *un espace connexe. Alors* $cat(X) = n$ *si et seulement si* n *est le plus petit entier tel qu'il existe une section* $s : X \to G_n(X)$ *de la fibration de Ganea,* $p_n : G_n(X) \to X$*.*

Le résultat suivants montre l'intêret des espaces de Ganea

Théorème . *Les catégories des espaces de Ganea sont comme suit:*
(1) *Si* $n \leq cat(X)$*, alors,* $cat(G_n(X)) = n$*.*
(2) *Si* $n \geq cat(X)$*, alors* $cat(G_n(X)) = cat(X)$*.*

4. La LS-catégorie rationnelle

La Théorie des modèles minimaux de Sullivan est utilisée par Y.Félix et S. Halperin pour introduire la LS-catégorie $cat_0(x)$ pour tout espace simplement connexe et montrer qu'elle concide avec $cat(X_{\mathbb{Q}})$ du rationnalisé de X. Avant de la définir, nous introduisons d'autres invariants approximant la LS-catégorie.

Définition . *Soit* X *un espace topologique. on appelle catégorie géométrique,* $gcat(X)$ *le plus petit entier* $m \geq 0$ *tel qu'il existe un recouvrement de* X *par* $m+1$ *ouverts contractiles (dans eux mêmes).*

Définition . *Soit* M *une varété compacte de dimension* n *(peut être sans bord), on appelle bcat(M), le plus petit* $m \geq 0$*, tel qu'il existe un recouvrement de* M *par* $m+1$ *disques fermés de dimensiins* n*. Un disque fermé de dimension* n*, étant homéomorphe à* $\mathbb{D}^n$ *et est un retract par déformation d'une carte locale de* M*.*

Remarque . *(1):* $bcat(M)$ *est utilisée par C. Gavrila en* 2002 *pour améliorer le résultat de Lusternik-Schnirelmann en* $Crit(M) \geq bcat(M) + 1$*.*
(2): $gcat(-)$ *et* $bcat(-)$ *ne sont pas invariants par type d'homotopie, ce qui conduit à la définition suivante:*

Définition . *Soit* X *un espace topologique, on défini*

$$Cat(X) = min\{gcat(Y),\ Y \simeq X\}.$$

Par définition $Cat(X)$ est un invariant par type d'homotopie. Elle est liée à la LS-catégorie par les deux résultats suivants:

Théorème . *Si X est un espace connexe par arcs et de même type d'homotopie qu'un CW-complexe, alors il existe une suspension ΣZ telle que $Cat(X \vee \Sigma Z) = cat(X)$. En plus, $cat(X) \leq Cat(X) \leq cat(X) + 1$.*

Proposition . *Cat(-) caractérise les suspensions, c. à. d. $Cat(X) = 1$ si et seulement si $X \simeq \Sigma Z$ pour un certain Z.*

Remarque . *Dans les exemples où $Cat(X)$ et $cat(X)$ sont distincts, l'invariant de Hopf joue un rôle détérminant.*

4.1. **Deux invariants identiques à $Cat(-)$.** On suppose que (X, x_0) est un espace pointé connexe par arcs et de même type d'homotopie qu'un CW-complexe.

Définition . cone-length: *$cl(X)$ est nul si X est contractile, sinon, il est égal au plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe des cofibrations $Z_{i-1} \to Y_{i-1} \to Y_i$, $1 \leq i \leq n$ avec $Y_0 \simeq x_0$ et $Y_n \simeq X$.*
suspension cone-length: *$cl_\Sigma(X)$ est défini d'une faon similaire en prenant chaque $Z_i = \Sigma^i W$ pour un certain W.*

On a alors le théorème suivant:

Théorème . *Si $cat(X) = n$, alors il existe un espace Z tel que $cl_\Sigma(X \vee \Sigma^n Z) \leq n$. En plus, on a $Cat(X) = cl(X) = cl_\Sigma(X)$.*

Exemple . *La construction fibre-cofibre de Ganea, induit des fibrations*

$$F_{k-1}(X) \to G_{k-1}(X) \to G_k(X)$$

avec $F_{k-1} \simeq (\Omega X)^{*(k-1)}$ une $(k-1)$-suspension. Par suite, $\forall k \leq n$, $cl_\Sigma(G_k(X)) \leq k$ et si $cat(X) = n$, alors, $\forall k \leq n$, $cl_\Sigma(G_k(X)) = k$ puisque $cat(G_k(X)) = k$.

Remarque . *Les espaces de Ganea $G_k(X)$ (cf. Remark 1. 62 dans [1]) approchent X à une prcision de plus en plus grande autant que n augmente. Il en résulte que $cl_\Sigma(X)$ et donc $Cat(X)$ détermine le nombre n des étages nécessires pour construire un espace Y homotope à X.*

Revenant maintenant au cas rationnel. Soit A une algèbre différentielle graduée (adg) et augmentée par $\epsilon : A \to \mathbb{Q}$. Notons $\bar{A} = Ker(\epsilon)$. On dira que A est de nilpotence $n \in \mathbb{N}$, si $\bar{B}^n \neq 0$ et $\bar{A}^{n+1} = 0$. On convient que $\mathbb{Q}$ est l'unique adg augmentée de nilpotence égale à 0.

Définition . *Soit X un espace simplement connexe de type fini.*

(1) *La nilpotence $nil_0(X)$ de X est par définition, le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un modèle de Sullivan A de X de nilpotence égale à n.*

(2) *La LS-catégorie rationnelle $cat_0(X)$ est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un diagramme commutatif d'adg:*

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda V, d) & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & (\Lambda V, d) \\ & & \varphi \downarrow \simeq & & \\ & & A & & \end{array} \tag{4.1.1}$$

avec $(\Lambda V, d)$ le modèle minimale de X, B une algèbre de Sullivan minimale, A une adg augmentée quasi-isomorphe à B et de nilpotence $\leq n$ et $g \circ f \simeq Id$.

Notons pour la suite

$$pr_n : (\Lambda V, d) \to (\frac{\Lambda V}{\Lambda^{\geq n+1} V}, \bar{d})$$

la projection naturelle de $(\Lambda V, d)$ sur le quotient $(\frac{\Lambda V}{\Lambda^{\geq n+1} V}, \bar{d})$. C'est un morphisme d'adg et par suite pr_n se prolonge à la KS-extension $(\Lambda V \otimes \Lambda Z, D)$ et on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} & & (\Lambda V \otimes \Lambda Z, D) \\ \iota \nearrow & & \simeq \downarrow \rho_n \\ (\Lambda V, d) & \overset{pr_n}{\to} & (\frac{\Lambda V}{\Lambda^{\geq n+1} V}, \bar{d}) \end{array}$$

$(\Lambda V \otimes \Lambda Z, D)$ est un modèle de Sullivan minimal de $(\frac{\Lambda V}{\Lambda^{\geq n+1} V}, \bar{d})$ et ρ_n est appelée, modèle de Sullivan de pr_n. La proposition suivante donne une formulation plus explicite de la définition de $cat_0(X)$

Proposition . *Avec les notations précédentes, l'existence d'un diagramme de type (4.1.1) est équivalent à l'existence d'une rétraction $r : \Lambda V \otimes \Lambda Z \to \Lambda V$ à homotopie près d'adg de ι rendant le diagramme suivant commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} & & (\Lambda V \otimes \Lambda Z, D) \\ \iota \nearrow r \swarrow & & \simeq \downarrow \rho_n \\ (\Lambda V, d) & \overset{pr_n}{\to} & (\frac{\Lambda V}{\Lambda^{\geq n+1} V}, \bar{d}) \end{array} \tag{4.1.2}$$

En utilisant la correspondance entre l'algèbre et la topologie, on peut alors reformuler la définition de $cat_0(X)$ comme suit:

Définition . *$cat_0(X)$ est le plus petit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $X_{\mathbb{Q}}$ est un retract à homotopie près de $Y_{\mathbb{Q}}$ avec Y un espace qui vérifie $nil_0(Y) = n$.*

D'autre par la relation $Cat(S \vee \Sigma Z) = cat(S)$ permet aussi d'adopter la définition suivante:

Définition . *$cat(S)$ est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que S est retract à homotopie près de S' qui vérifie $Cat(S') = n$.*

Théorème . *Si X est un espace simplement connexe de type fini, alors $nil_0(X) = Cat(X_{\mathbb{Q}})$.*

En prenant $S = X_{\mathbb{Q}}$ on aura S' est aussi rationnel, donc $S' = Y_{\mathbb{Q}}$ et on a alors $Cat(Y_{\mathbb{Q}}) = nil_0(Y) = n$. En conséquence, on a

$$cat_0(X) = cat(X_{\mathbb{Q}}) \leq cat(X)$$

.

Définition . *Si X est un espace simplement connexe de type fini,*

(1) *L'invariant de Toomer rationnel$e_0(X)$ est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$(pr_n)^* : H(\Lambda V, d) \to H(\frac{\Lambda V}{\Lambda^{\geq n+1} V}, \bar{d})$$

soit injective.

(2) *L'invariant de Toomer à coefficients dans R (un anneau commutatif unitaire) est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(p_n)^* : H^*(X, R) \to H^*(G_n(X), R)$soit injective, où $p_n : G_n(X) \to X$ désigne la n^{-eme} fibration de Ganea.*

Théorème . *Si X est un espace simplement connexe de type fini, alors*

$$e_0(X) = e_{\mathbb{Z}}(X) = e_{\mathbb{Q}}(X).$$