FAC. SCIENCES, MEKNES

RHT-Seminar

Spectral Sequences II

11 FÉVRIER 2012

My Ismail Mamouni-CPGE-CPR Rabat

Professeur Agrégé-Docteur en Math
Master 1 en Sc de l’éducation, Univ. Rouen
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

Objectif

Calcul approché de l'homologie

Complexe Gradué

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\cdots \arrow[r, "d"] & C_{p+1,q-1} \arrow[r, "d"] & C_{p,q-1} \arrow[r, "d"] & C_{p-1,q-1} \arrow[r, "d"] & \cdots & H_{q-1}(C,d) \\
\cdots \arrow[r, "d"] & C_{p+1,q} \arrow[r, "d"] & C_{p,q} \arrow[r, "d"] & C_{p-1,q} \arrow[r, "d"] & \cdots & H_q(C,d) \\
 & C_{p+1,q+1} & C_{p,q+1} & C_{p-1,q+1} & & H_{q+1}(C,d) \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

Complexe Filtré

$$0 = \mathcal{F}_{p,0} \subset \mathcal{F}_{p,1} \subset \mathcal{F}_{p,2} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{p,n} = C_p$$

La différentielle d respecte la filtration

$$d\mathcal{F}_{p,q} \subset \mathcal{F}_{p-1,q}$$

Inconvénient

$$\underbrace{E^1 := \bigoplus_{p,q} E^1_{p,q}}_{\text{Hom. graduée}} \neq \underbrace{H_*(\mathcal{C}, d)}_{\text{Hom. filtrée}}$$

Avantage

$$E^1 := H(E^0, d) \simeq H(\mathcal{C}, d)$$

Complexe Filtré

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "d"] & & \vdots \arrow[d, "d"] & & \vdots \arrow[d, "d"] & & \vdots \arrow[d, "d"] \\
0 = \mathcal{F}_{p+1,0} \arrow[d, "d"] & \subset & \mathcal{F}_{p+1,1} \arrow[d, "d"] & \subset & \mathcal{F}_{p+1,2} \arrow[d, "d"] & \subset \cdots \subset & \mathcal{F}_{p+1,n} = C_{p+1} \arrow[d, "d"] \\
0 = \mathcal{F}_{p,0} \arrow[d, "d"] & \subset & \mathcal{F}_{p,1} \arrow[d, "d"] & \subset & \mathcal{F}_{p,2} \arrow[d, "d"] & \subset \cdots \subset & \mathcal{F}_{p,n} = C_{p} \arrow[d, "d"] \\
0 = \mathcal{F}_{p-1,0} \arrow[d, "d"] & \subset & \mathcal{F}_{p-1,1} \arrow[d, "d"] & \subset & \mathcal{F}_{p-1,2} \arrow[d, "d"] & \subset \cdots \subset & \mathcal{F}_{p-1,n} = C_{p-1} \arrow[d, "d"] \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

Inconvénient

Complexe Filtré

$$V \cong U \oplus (V/U)$$

$$E^0_{p,q} := \mathcal{F}_{p,q}/\mathcal{F}_{p,q-1}$$

$$C_p = \bigoplus_{q=1}^{n} E^0_{p,q}$$

Complexe Filtré

d passe au quotient de façon naturelle

$$d_0 : C_p = \bigoplus_{q=1}^{n} E^0_{p,q} \longrightarrow C_{p-1} = \bigoplus_{q=1}^{n} E^0_{p-1,q}$$

ou plus précisément

$$d_0 : E^0_{p,q} \longrightarrow E^0_{p-1,q}$$

Complexe Filtré

On obtient un complexe gradué

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots \arrow[r, "d_0"] & E^0_{p+1,q-1} \arrow[r, "d_0"] & & E^0_{p,q-1} \arrow[r, "d_0"] & & E^0_{p-1,q-1} \arrow[r, "d_0"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_0"] & E^0_{p+1,q} \arrow[r, "d_0"] & & E^0_{p,q} \arrow[r, "d_0"] & & E^0_{p-1,q} \arrow[r, "d_0"] & \cdots \\
 & E^0_{p+1,q+1} & & E^0_{p,q+1} & & E^0_{p-1,q+1} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Inconvénient

$$\underbrace{E^1 := \bigoplus_{p,q} E^1_{p,q}}_{\text{Hom. graduée}} \neq \underbrace{H_*(\mathcal{C}, d)}_{\text{Hom. filtrée}}$$

Complexe Filtré

1ér terme

$$E^1_{p,q} := H_q(E^0_{p,q}, d_0) = \frac{\ker d_0 : E^0_{p,q} \longrightarrow E^0_{p-1,q}}{\operatorname{Im} d_0 : E^0_{p+1,q} \longrightarrow E^0_{p,q}}$$

Inconvénient

$$\underbrace{E^1 := \bigoplus_{p,q} E^1_{p,q}}_{\text{Hom. graduée}} \neq \underbrace{H_*(\mathcal{C}, d)}_{\text{Hom. filtrée}}$$

Avantage

$$E^1 := H_*(E^0, d_0) \approx H_*(\mathcal{C}, d)$$

Cas Simple

Complexe filtré à 2 étages

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_0"] & E^0_{p+1,2} \arrow[r, "d_0"] & E^0_{p,2} \arrow[r, "d_0"] & E^0_{p-1,2} \arrow[r, "d_0"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_0"] & E^0_{p+1,1} \arrow[r, "d_0"] & E^0_{p,1} \arrow[r, "d_0"] & E^0_{p-1,1} \arrow[r, "d_0"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Cas Simple

Complexe filtré à 2 étages

- $H_p = Z_p/B_p$ où Z_p désigne l'espace des cycles dans C_p et B_p celui des bords
- Z_p et for B_p héritent de C_p et d'une façon naturelle sa filtration

$$0 = Z_{p,0} \subset Z_{p,1} \subset Z_{p,2} = Z_p$$

and

$$0 = B_{p,0} \subset B_{p,1} \subset B_{p,2} = B_p$$

- d_0 passe au quotient de façon naturelle et induit $d_1 : E^1_{p+1,2} \longrightarrow E^1_{p,1}$, parce que le bord d'un élément de $E^1_{p+1,2}$ est un cycle dans $\mathcal{F}_{d,1}$, qui définit un élément de $E^1_{p,1}$.

Cas Simple

Complexe filtré à 2 étages

$$d$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr, "d_1"] & 0 \arrow[dr, "d_1"] & 0 \arrow[dr, "d_1"] & 0 \arrow[dr, "d_1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[dr, "d_1"] & E^1_{p+1,2} \arrow[dr, "d_1"] & E^1_{p,2} \arrow[dr, "d_1"] & E^1_{p-1,2} \arrow[dr, "d_1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[dr, "d_1"] & E^1_{p+1,1} \arrow[dr, "d_1"] & E^1_{p,1} \arrow[dr, "d_1"] & E^1_{p-1,1} \arrow[dr, "d_1"] & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Convergence

$$E^2 = H_*(E^1, d_1) = H_*(C, d)$$

pour un complexe filtré à 2 étages.

Convergence

Cas général on ne peut rien prédire, mais de façon récursive on obtient :

$$d_r : E^r_{p,q+r} \longrightarrow E^r_{p-1,q}$$

r=2

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rrd, "d_2"] & E^2_{p,q+2} \arrow[rrd, "d_2"] & E^2_{p,q+1} \arrow[rrd, "d_2"] & E^2_{p,q} & \cdots \\
\cdots & E^2_{p-1,q+2} & E^2_{p,q+1} & E^2_{p,q} & \cdots
\end{tikzcd}$$

r qlq

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rrd, "d_r"] & E^r_{p,q+r} \arrow[rrd, "d_r"] & \cdots \arrow[rrd, "d_r"] & E^r_{p,q} & \cdots \\
\cdots & E^r_{p-1,q+r} & \cdots & E^r_{p-1,q} & \cdots
\end{tikzcd}$$

Convergence

Théorème

Soit C un complexe filtré, alors elle existe une suite spectrale canonique $E^r_{p,q}$ qui débute en page 0,

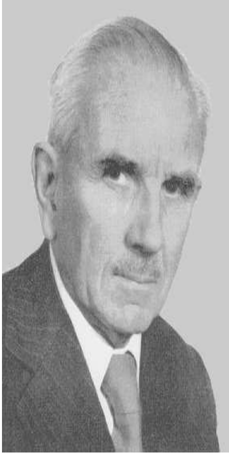
$$E^0_{p,q} = \mathcal{F}_p C_{p+q} \mathcal{F}_{p+1} C_{p+q}$$

$$E^n = H_n(C)$$

On écrit alors

$$E^r_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}(C).$$

Histoire



Fondateur : Jean Leray

Histoire

Jean Leray était d'abord un analyste et il considérerait la topologie et plus particulièrement la topologie algébrique comme un outil pour démontrer des théorèmes d'analyse. Mais pendant la Seconde Guerre mondiale, craignant que les Allemands puissent le réquisitionner pour ses compétences en dynamique des fluides, il dirigeait son intérêt vers la topologie algébrique.

Histoire

Pendant sa captivité en Autriche comme officier de l’armée française Leray a développée trois notions qui ont donné lieu à ce que R. Bott appelle "the french revolution" :

1. la notion de faisceau sur un espace topologique
2. la cohomologie des faisceaux
3. la méthode des suites spectrales.

Histoire

C'est J.-L. Koszul qui a dégagé en 47 de la construction de Leray le principe de la suite spectrale associée a un complexe filtre. Ceci a permis d'appliquer cette méthode au delà du cadre de la théorie des faisceaux. J.P. Serre a construit dans sa thèse (1951) une filtration sur les complexes des chaînes et cochaînes singulières qui donnait alors pour des fibrations très générales des suites spectrales en homologie et en cohomologie singulière. Ceci a été un pas décisif pour la théorie d'homotopie.

Histoire

Leray (27 Mai 1946) une structure particulière de l’anneau d’homologie d’une représentation"
Koszul (21 Juillet 1947) suite d’homologies (d’un anneau à dérivation supérieure)"
Cartan (5 Janvier 1948) suite de Leray-Koszul"
Leray (1949) anneau spectral"
Borel and Serre (26 Juin 1950) suite de Leray-Koszul"
Serre (2 Octobre 1950) anneau spectral"
Serre (18 Décembre 1950) suite spectrale"

Histoire

Koszul

Comme moi , Cartan ne voyait pas bien quel spectre on voulait évoquer et on a mis du temps à s’y habituer. En 49 je l’évitais encore." ♣

References

- T. Y. Chow, You Could Have Invented Spectral Sequences, Notices of the AMS, Jan 2006, 15-19.
- A. Hatcher, Spectral Sequences in Algebraic Topology,http ://www.math.cornell.edu/ hatcher/SSAT/SSATpage.html
- J. McCleary, A User's Guide to Spectral Sequences, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 58 (2001, 2nd ed.), Cambridge University Press, doi :10.2277/0521567599, ISBN 978-0-521-56759-6, MR1793722
- J. McCleary, A history of spectral sequences : Origins to 1953, in History of Topology, edited by Ioan M. James, North Holland, 1999, 631–663.
- B. Mitchell, Spectral sequences for the layman, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 599–605.


MERCI!
THANK YOU!
FRAPAR.