

Invariants topologiques et courbure des surfaces Réelles en dimension 3.

Par : Aaya Hassan

Sommaire :

- 1- Introduction
- 2- Formule d'Euler et sa généralisation
- 3- Nombres de Betti
- 4- Théorème de Gauss-Bonnet et caractéristique d'Euler-Poincaré
- 5- Chirurgie sous contrôle
- 6- Conclusion

1/ Introduction

Le texte fondateur de la topologie algébrique est le mémoire d'Henri Poincaré intitulé *Analysis Situs* publié en 1895, il introduit le concept d'Homologie, les nombres de Betti, le groupe fondamental et la généralisation de la caractéristique d'Euler.

Le but de la topologie algébrique est de classer, les objets géométriques en leur associant des invariants de nature algébriques.

Un lien entre topologie et courbure est assuré par le célèbre, Etabli par Carl Friedrich Gauss en 1827, étendu en 1848 par Ossian Bonnet et puis généralisé par Shiing-Shen Chern en 1944. Ce résultat exprime la relation entre la courbure des surfaces et la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Dans ce qui suit nous exposons ces invariants dans le cas des surfaces de \mathbb{R}^3 , puis nous les relierons au Théorème de Gauss-Bonnet d'une manière très simple, en vue de la appliquer à la « chirurgie sous control ».

2/ Formule d'Euler et sa généralisation

a- Surfaces triangulées

On appelle surface triangulée un espace Σ , non vide, qui vérifie les propriétés suivantes :

i) Σ est une réunion finie de triangles (on appelle triangle un espace isométrique à l'enveloppe convexe de trois points non alignés dans \mathbb{R}^2) :

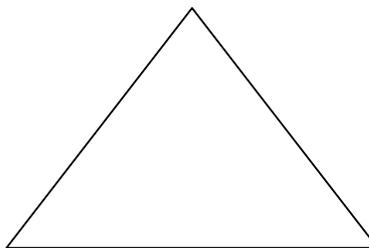


Figure 1 : Un triangle

$\Sigma = \bigcup_{i \in I} T_i$, Où I est un ensemble fini

ii) Deux triangles T_i et T_j , $i \neq j$, ont leur intersection soit vide, soit réduite à un sommet commun, soit réduite à une arête commune. En particulier, la situation de la figure 2 ne peut pas se présenter, car $T_1 \cap T_2$ et $T_1 \cap T_3$ ne sont que des morceaux d'arête de T_1 .

Toute arête est contenue dans exactement deux triangles distincts.

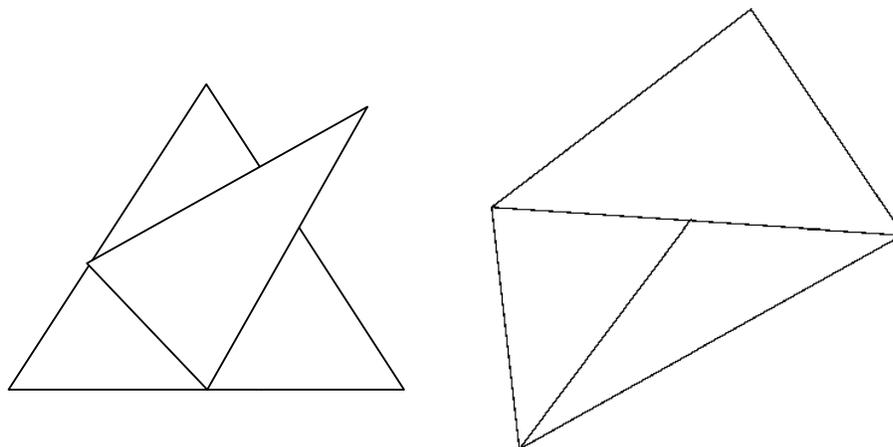


Figure 2 : Situations interdites

Remarque. Il s'agit en fait simplement de découper des triangles dans un plan et de les recoller suivant des arêtes de même longueur. On ne peut néanmoins pas toujours le faire physiquement, car notre surface ne se plonge pas forcément dans \mathbb{R}^3 .

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des surfaces triangulées connexes, c'est à dire d'un seul tenant (Σ n'est pas réunion disjointe de deux sous-surfaces triangulées).

Remarque. Une surface triangulée est munie d'une topologie naturelle, où une partie est ouverte si sa trace sur chaque triangle (c'est-à-dire l'intersection) est une partie ouverte du triangle. Cette topologie ne dépend pas de la forme des triangles mais uniquement de la façon dont ils sont recollés. Ainsi, lorsqu'on ne s'intéresse qu'à la topologie de la surface, on peut supposer que tous les triangles utilisés sont équilatéraux ce qui permet d'étudier la surface en étudiant simplement sa combinatoire.

Néanmoins, on ne peut restreindre l'étude de la courbure d'une surface, qui est une notion géométrique, à une étude uniquement combinatoire. Pour parler de géométrie, il faut parler de distance, et une surface triangulée est justement munie d'une distance naturelle ou les triangles sont plongés isométriquement dans la surface et ou la distance entre deux points est la longueur minimale d'un chemin affine par morceaux joignant ces deux points.

Exemple: Le tétraèdre, l'octaèdre, et l'icosaèdre sont des surfaces triangulées, toutes trois homéomorphes à la sphère.

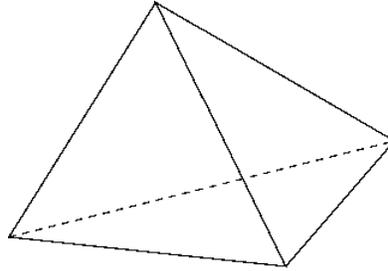


Figure 3 : Le tétraèdre

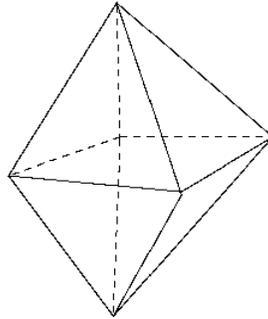


Figure 4 : L'octaèdre

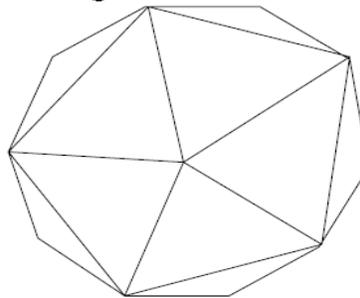


Figure 5 : L'icosaèdre

De plus, on a le théorème important suivant :

Théorème (Rado 1925): *Il existe des surfaces triangulées homéomorphes à n'importe quelle surface compacte.*

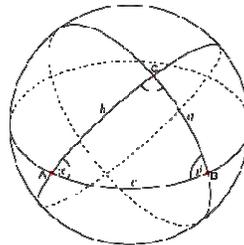


Figure 6: Une triangulation de la sphère

Définissons maintenant une notion très utile pour la suite :

Définition: Etant donné deux surfaces triangulées Σ_1 et Σ_2 , on dit que Σ_1 est plus fine que Σ_2 (ou est une subdivision de Σ_2) s'il existe un homéomorphisme qui soit affine sur chaque triangle de Σ_1 , et tel que tout triangle de Σ_2 soit réunion d'images de triangles de Σ_1 .

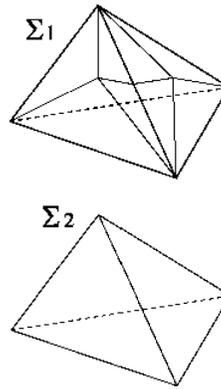


Figure 7: Σ_1 est plus fine que Σ_2

On a aussi le théorème suivant :

Théorème: Etant donné deux surfaces triangulées Σ_1 et Σ_2 homéomorphes, il existe une surface triangulée plus fine que Σ_1 et que Σ_2 .

Toutes ces notions vont nous servir pour étudier la courbure des surfaces triangulées, notion plus simple que pour les surfaces riemanniennes.

b- Caractéristique d'Euler-Poincaré

Si T est une triangulation de d'une surface compacte Σ , on note n_S le nombre des sommets de T , n_A le nombre des arêtes et n_T le nombre des faces, on définit le nombre $\chi(T)$ par :

$$\chi(T) = n_S - n_A + n_T.$$

Théorème: Le nombre $\chi(T)$ ne dépend pas de la triangulation choisie, C'est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface Σ . On la note $\chi(\Sigma)$.

Remarque: on peut aussi calculer $\chi(\Sigma)$ à partir d'une polygonisation; on remplace les triangles par des polygones homéomorphes au disque. On peut autoriser 2 polygones à se couper suivant une réunion quelconque de leurs sommets et arêtes. L'idée est qu'à partir d'une telle polygonisation on peut construire une triangulation par subdivision : exp du tore obtenu à partir d'un seul rectangle.

Théorème. Soit Σ une surface triangulée. L'entier $\chi(\Sigma)$ associé cette surface triangulée ne dépend que de la topologie de la surface.

Il existe plusieurs preuves de l'invariance topologique de $\chi(\Sigma)$.

Démonstration. D'après le théorème, il suffit de vérifier que l'on ne change pas ce nombre en raffinant la surface triangulée. Or, raffiner une surface triangulée revient à lui rajouter des sommets. Regardons donc ce qui se passe lorsqu'on rajoute un sommet :

Si le sommet S qu'on rajoute est à l'intérieur d'un triangle, cela donne la situation suivante :

S_2

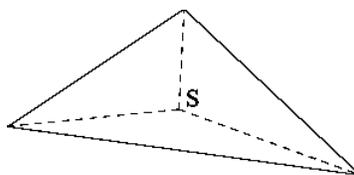


Figure 8

On voit que sont apparus trois nouveaux triangles, trois nouvelles arêtes, un nouveau sommet, mais qu'un triangle a disparu. Le nombre $n_S - n_A + n_T$ n'a donc pas changé.

Si le sommet S qu'on rajoute se trouve sur une arête, cela donne:

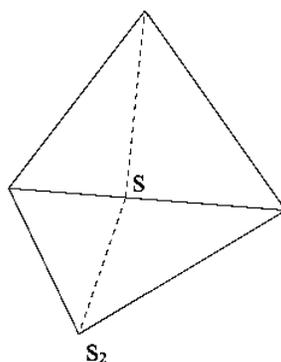


Figure 9

On voit que sont apparus quatre nouveaux triangles, quatre nouvelles arêtes, un nouveau sommet, mais que deux triangles et une arête ont disparu. Le nombre $n_S - n_A + n_T$ n'a pas changé non plus.

Donc la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface triangulée est la même que celle d'une surface triangulée plus fine, elle ne dépend que de la topologie de la surface.

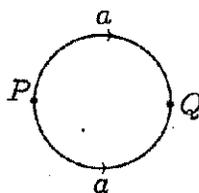


Figure 10: Cas de la sphère $\chi(S^2) = 2$

Surface	n_S	n_A	n_T	χ
Sphère	2	1	1	2
n-tore	1	2n	1	2-2n
m-plan projectif	1	m	1	2-m

Les cas possibles de la caractéristique d'Euler-Poincaré des surfaces dans \mathbb{R}^3

3/ Nombres de Betti

L'algèbre des chaînes

En étudiant les caractéristiques d'Euler, nous avons comptabilisé le nombre de cellules de chaque type. Afin d'obtenir plus d'informations sur un processus complexe, nous allons étudier non seulement le nombre de cellules qu'il a, mais aussi quel type de cellules, et comment elles sont identifiées.

Nous souhaitons garder une trace de toutes les cellules dans un complexe et la façon dont elles sont collées ensemble. Nous devons également prendre compte des directions de tous les bords collés ensemble.

Une arête, est homéomorphe à l'intervalle $[0,1]$, a une direction naturelle: à partir du point de départ (correspondant à 0) au point d'arrivée (correspondant à 1). Nous noterons la direction le long du bord une par une flèche.



Figure 11: Complexe du Tore

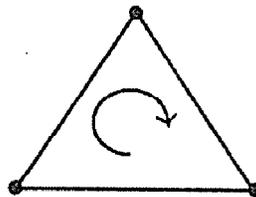


Figure 12 : Orientation d'un triangle

On comptabilise positivement une cellule si elle est parcourue dans le sens de l'orientation, sinon elle est comptabilisée négativement, et par addition et soustraction on définit les opérations sur le complexe considéré ; exp : la quantité $6a-2b$ du complexe de la figure 11, signifie que l'on parcourt le cercle a 6 fois dans le sens de la flèche, et puis on parcourt le cercle b deux fois dans le sens inverse à la flèche.

Définition. Soit C et D des k -chaînes dans un complexe orienté K , écrite comme $C = a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n$; $D = b_1\sigma_1 + \dots + b_n\sigma_n$

La somme $C + D$ est définie par $C + D = (a_1 + b_1)\sigma_1 + \dots + (a_n + b_n)\sigma_n$

Et on le résultat suivant :

Théorème. Soient C_1, C_2, C_3 sont toutes des k -chaînes dans un complexes orienté K . l'addition des k -chaînes possède les propriétés suivantes :

- (1) Commutativité: $C_1 + C_2 = C_2 + C_1$.
- (2) Associativité: $C_1 + (C_2 + C_3) = (C_1 + C_2) + C_3$.
- (3) Identité: $C_i + \emptyset = C_i$ (\emptyset l'ensemble vide)
- (4) Inverse: $C_i + (-C_i) = C_i - C_i = 0$

Si K est un complexe orienté dans \mathbb{R}^3 On note $C_k(K)$, le groupe abélien de toute les k -chaînes de K , pour $k=0,1,\dots, \dim(K)$. Notez que pour des complexes finis, en particulier pour les surfaces compactes, le groupe $C_k(K)$ possède un nombre fini de générateurs et il sera de la forme $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$.

Définition. Le bord d'une k -cellule σ , noté $\partial(\sigma)$, est la k -chaîne constituée de toutes les $(k-1)$ cellules qui sont des faces de σ , et qui héritent de l'orientation de σ .

Le bord d'une 0-cellule est l'ensemble vide $\partial(P) = \emptyset$. Le bord d'une 1-cellule orientée a formée des points P et Q et du segment (PQ) s'écrit:

$$\partial(P) = Q - P.$$

Définition. Si C est une k -chaîne orientée dans un complexe K , telle que $\partial(C) = \emptyset$, alors C s'appelle un k -cycle. L'ensemble de tous les k -cycles est l'ensemble $Z_k \subseteq C_k$.

Définition. Si C est une k -chaîne Orientée dans un complexe K , telle qu'il existe une $(k+1)$ -chaîne avec $\partial(C) = \emptyset$, alors C s'appelle un k -cycle. L'ensemble de tous les k -cycles est l'ensemble $Z_k \subseteq C_k$.

Théorème. La composition $\partial \circ \partial: C_k \rightarrow C_{k-2}$ satisfait : $\partial \circ \partial(C) = \emptyset$ pour toute k -chaîne C du complexe K .

La démonstration est basée sur la triangulation vue dans la première partie.

L'Homologie

Définition. Deux k -chaînes C_1 et C_2 sont dites homologues, et on écrit $C_1 \sim C_2$ si $C_1 - C_2 \in B_k(K)$; i.e $C_1 - C_2 = \partial(D)$, Pour une $(k+1)$ -chaîne D .

Lemme. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

Définition. Soit K un complexe orienté. Le groupe $H_k(K) = Z_k(K)/B_k(K)$ est appelé $k^{\text{ème}}$ groupe d'homologie de K , il s'agit du groupe des classes d'équivalence des éléments de $Z_k(K)$ avec la relation d'équivalence définie ci-dessus.

Exemple :

Calculons les groupes d'homologie de la sphère S^2 , représentée par le complexe de la figure

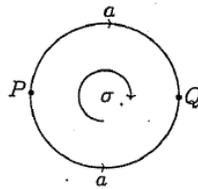


Figure 13 : Le complexe K sur la sphère.

Puisque nous n'avons que des k -cellule pour k allant de 0 à 2, Nous allons calculer $H_0(K)$, $H_1(K)$, et $H_2(K)$.

Commençons par chercher $C_2(K)$:

La seule 2-cellule est σ . Alors les 2-chaînes sont sous la forme $\sigma, 2\sigma, 3\sigma, \dots, -\sigma, -2\sigma \dots$ et \emptyset , alors $C_2(K) \simeq \mathbb{Z}$.

Calculons $Z_2(K)$ et $B_2(K)$:

- σ est un 2-cycle vue que $\partial(\sigma) = a - a = \emptyset$, donc $Z_2(K) \simeq \mathbb{Z}$.
- S^2 ne contient pas de 3-cellule, donc σ ne peut être le bord d'aucune 3-cellule, alors $B_2(K) = \emptyset \simeq 0$.

Nous pouvons conclure que $H_2(K) = Z_2(K) \simeq \mathbb{Z}$.

Pour $H_1(K)$:

On a $C_1(K) = \{a, 2a, \dots, \emptyset, -a, -2 \dots\} \simeq \mathbb{Z}$.

$\partial(a) = Q - P \neq 0$, d'où a n'est pas un 1-cycle, donc $Z_1(K) = \{\emptyset\} \simeq 0$.

Puisque $\partial(\sigma) = \emptyset$, alors σ est le seul 1-bord de σ , donc $B_1(K) = \emptyset \simeq 0$.

donc: $H_1(K) = Z_1(K) \simeq 0$.

On répète ce processus pour $H_0(K)$:

On a $C_0(K) = \{\emptyset, P, 2P, \dots, -P, -2P \dots, Q, 2Q, \dots, -Q, -2Q, \dots\}$,

$C_0(K) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

On a $\partial(P) = \partial(Q) = \emptyset$, donc $Z_0(K) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

On a $P \sim Q$, donc $H_0(K) = \{\emptyset, P, 2P, \dots, -P, \dots\} \cong \mathbb{Z}$.

Les nombres de Betti et la caractéristique d'Euler-Poincaré

Il y'a une relation évidente entre la caractéristique d'Euler et les groupes chaîne, Puisque les $C_k(K)$ sont engendrés par les k-cellules. Ainsi, le rang, $rg(C_k(K))$, est le nombre de k-cellules. Pour un 2-complexe K, $\chi(K) = n_0 - n_1 + n_2 = Rg(C_0(K)) - Rg(C_1(K)) + Rg(C_2(K))$.

En général, pour un n-complexe K

$$\chi(K) = Rg(C_0(K)) - Rg(C_1(K)) + Rg(C_2(K)) - \dots + (-1)^n Rg(C_n(K))$$

Il y'a aussi une relation plus subtile entre les groupes d'homologie intégrale et la caractéristique d'Euler; pour l'explorer, nous devons aller un peu plus profondément dans la théorie des groupes. Notons le $k^{ème}$ homomorphisme sur les groupes de la chaîne d'un complexe K par $\partial_k: C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$. Notez que $Z_k(K) = \ker(\partial_k)$ et $B_k(K) = \text{Im}(\partial_{k+1})$:

Notons:

$$c_k = Rg(C_k(K))$$

$$z_k = Rg(Z_k(K))$$

$$b_k = Rg(B_k(K))$$

On a le résultat suivant:

$$c_k = z_k + b_{k-1}$$

Définition. On appelle les nombres de Betti d'un complexe K les nombres $\beta_k = Rg(H_k(K))$.

Par définition on a, $H_k(K) = Z_k(K) / B_k(K)$, alors on conclue que

$$\beta_k = z_k - b_k$$

Théorème. Soit K un n-complexe. Alors on a la relation suivante :

$$\chi(K) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \dots + (-1)^n \beta_n$$

Preuve. En utilisant les résultats ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned} & \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \dots + (-1)^n \beta_n \\ &= (z_0 - b_0) - (z_1 - b_1) + \dots + (-1)^n (z_n - b_n) \\ &= z_0 - (b_0 + z_0) + (b_1 + z_2) - \dots + (-1)^n (b_{n-1} + z_n) + (-1)^n b_n \\ &= z_0 - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^n c_n + (-1)^n b_n \end{aligned}$$

Pour tout 0-chaîne C, $\partial(C) = \emptyset$ si $Z_0(K) = C_0(K)$ et, par conséquent, $z_0 = c_0$. Le groupe $B_n(K) = 0$, donc $b_n = 0$.

$$\beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \dots + (-1)^n \beta_n = c_0 - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^n c_n = \chi(K)$$

Les nombres de Betti sont des invariants topologiques contenant beaucoup d'informations. Ils peuvent être combinés comme ci-dessus pour former la caractéristique d'Euler.

Notez que si S est une surface orientable, $\beta_2 = 1$, et si S non-orientable, $\beta_2 = 0$. Ainsi, β_2 détermine l'orientabilité de la surface. Le nombre des composantes connexes du complexe est évidemment donné par β_0 .

4/ Courbure et théorème de Gauss-Bonnet

Courbures d'une surface

Lorsqu'on se donne un cercle C de périmètre P et de rayon R dans un plan, P et R sont reliés par l'équation:

$$P = 2\pi R$$

Lorsqu'on considère le même dessin sur une sphère de rayon 1 (munie de la distance sphérique), l'équation devient :

$$P = 2\pi \sin(R)$$

Le fait que le périmètre d'un cercle de rayon donné sur une sphère soit plus petit que dans un plan vient du fait que la sphère se recourbe sur elle-même, donc à un défaut de platitude de la sphère.

C'est cette remarque qui va nous permettre de définir la courbure d'une surface triangulée.

On se donne une surface triangulée, et on se donne M un point de Σ . On se donne r , un réel strictement positif assez petit pour que le cercle tracé sur, de centre M et de rayon r ne rencontre pas les triangles auxquels M n'appartient pas. Notons P le périmètre de ce cercle et définissons la courbure en M par :

$$K(M) = 2\pi - \frac{P}{r}$$

On vérifie facilement que $K(M)$ ne dépend pas du r choisi (car deux cercles de rayons différents sont homothétiques). On a la proposition fondamentale suivante:

Théorème. *Si M n'est pas un sommet de Σ , on a $K(M) = 0$.*

Si S est un sommet de Σ , la courbure en S vaut: $K(S) = 2\pi - \sum_{S \in T} \hat{S}$

Où \hat{S} est l'angle du triangle T en S (la somme est prise sur les triangles de Σ ayant S pour sommet).

Démonstration. On étudie les trois cas:

- Si le point M est à l'intérieur d'un triangle, le cercle considéré est un cercle euclidien, donc la formule $P = 2\pi r$ s'applique, et $K(M) = 0$.

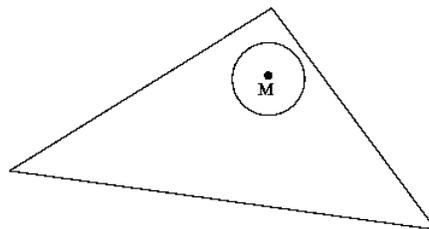


Figure 14

- Si le point M est sur l'arête d'un triangle, il appartient à deux triangles et à deux seulement. La trace du cercle de rayon r centré en ce point est, sur chacun des deux triangles, un demi-cercle euclidien de rayon r . Le périmètre total du cercle est donc égal à $2\pi r$ et la courbure en ce point est bien nulle.

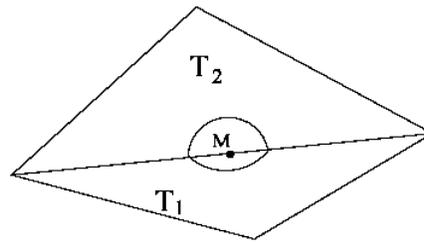


Figure 15

- Si, en fin, le point S considéré est un sommet, le périmètre du cercle est la somme des longueurs des traces de ce cercle sur les triangles de Σ . Or, la longueur de la trace d'un cercle centré au sommet S d'un triangle T et de rayon r inférieur à la distance de S au cote opposé vaut $r\hat{S}_T$, d'où la formule pour K(S).

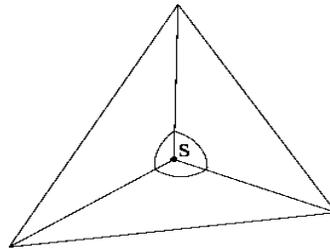


Figure 16

Ce théorème montre en particulier que la courbure d'une surface triangulée est concentrée aux sommets de la surface ■

On appelle courbure globale de Σ :

$$K(\Sigma) = \sum_{S \in \text{Sommets}(\Sigma)} K(S)$$

On montre le résultat suivant :

Théorème (Gauss-Bonnet). Soient n_S , n_A , n_T , les nombres respectifs de sommets, d'arêtes et de triangles de Σ . On a alors: $K = 2\pi(n_S - n_A + n_T) = 2\pi\chi(\Sigma)$

Démonstration. Chaque triangle possédant trois arêtes et chaque arête étant commune à deux triangles, on a $n_A = \frac{3n_T}{2}$. Or:

$$K = \sum_S (2\pi) - \sum_T \sum_{S \in T} \hat{S}_T$$

La somme des angles de tout triangle valant π , on adonc: $K = 2\pi n_S - \pi n_T$. Et comme $n_T = 2(n_A - n_T)$,

On obtient :

$$K = 2\pi(n_S - n_A + n_T)$$

C'est ce qu'il fallait démontrer ■

L'importance de la courbure globale se retrouve dans le théorème suivant :

Lemme. Soit une surface triangulée Σ , l'entier $K/2\pi = n_S - n_A + n_T$, associée à cette surface triangulée est la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\Sigma)$.

Généralisation :

Soit M une variété riemannienne à deux dimensions compacte (sans bord) ; alors l'intégrale de la courbure de Gauss permet de retrouver la caractéristique d'Euler de la surface

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M)$$

Pour une variété compacte à bord, la formule devient

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M)$$

en notant k_g la courbure géodésique aux points du bord ∂M .

Si le bord ∂M est seulement régulier par morceaux, la formule reste vraie, en prenant au lieu de l'intégrale $\int_{\partial M} k_g ds$ la somme des intégrales correspondantes sur les portions régulières du bord, plus la somme des angles formés aux points anguleux.

5/ Chirurgie sous contrôle :

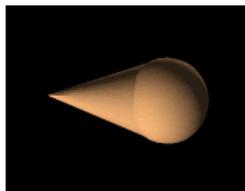


Figure 17 : Incorporation d'un point conique dans la sphère

La généralisation du théorème de Gauss-Bonnet sur des surfaces avec seulement des singularités coniques serait que toute la courbure qui est égale à l'intégrale de la courbure des parties douces de la surface plus la contribution de la courbure due aux points coniques.

$$\int_M K dA = 2\pi \sum_i [1 - \sin(\theta_i)] + 2\pi\chi(M);$$

où $\{\theta_i\}$ est l'ensemble des angles des points coniques de la surface.

Cette chirurgie peut permettre de modifier une surface homéomorphe à la sphère par exemple, tout en contrôlant sa courbure totale, de manière à construire de nouveaux objets.

6/ Conclusion :

On a introduit, dans le cas des surfaces deux importantes notions qui sont; la caractéristique d'Euler-Poincaré et la courbure, Ces concepts admettent des généralisations pour des variétés plus complexes.

La courbure est un concept métrique à la fois local et global, La caractéristique d'Euler-Poincaré et les nombres de Betti sont de nature purement globale.

L'origine combinatoire de ces invariants topologiques clarifie le rôle fondamentale de la topologie algébrique qui consiste à étudier les espaces topologiques à travers des invariants algébriques.

Bibliographie :

Frédéric Bosio : Courbure des surfaces triangulées.

Christine Kinsey: Topology of Surfaces.

Jesús De Loera; JörgRambau; Francisco Santos: Triangulations Structures for Algorithms and Applications.

fr.wikipedia.org