

1 - Définition: (espace de conf.)

l'espace de configuration de la particule dans une variété différentielle M est l'espace:

$$\mathbb{F}_k(M) = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \neq x_j \ \forall i \neq j \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{cite } \mathbb{F}_2(M) \\ \text{comme exemple} \end{array} \right)$$

L'objet: établir une relation (application) $\mathbb{F}_k(M) \rightarrow \mathbb{F}_r(M)$
plus précisément. m. que $\text{proj}_{k,r} : \mathbb{F}_k(M) \rightarrow \mathbb{F}_r(M)$
est un revêtement. au sens de Steenrod.

2 - Définition: (revêtement)

soit B un espace topologique, Un revêtement de B est la donnée d'un espace topologique E , et d'une app. cont. $\mu: E \rightarrow B$ ayant la propriété de trivialisations locale suivante:

$\forall b \in B, \exists V$ un voisinage de b dans B , et un espace discret non vide F , et un homéomorphisme $\phi: \mu^{-1}(V) \rightarrow V \times F$:

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(V) & \xrightarrow{\phi} & V \times F \\ \mu \searrow & & \swarrow \text{proj}_1 \\ & & V \end{array}$$

soit un diagramme commutatif.

- B s'appelle la base
- E l'espace total.
- F la fibre du revêtement.
- ϕ la trivialisations locale au dessus de V .

3- Définition (au sens de Steenrod)

si (U_i) est un recouvrement ouvert de B . tq:
 $\varphi_i : U_i \times F \rightarrow p^{-1}(U_i)$ soient des trivialisations locales.

On peut déduire que : $\varphi_j \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F$
 sont des homéomorphismes de la forme $(x, e) \mapsto (x, g_{ji}(x)(e))$.

où $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Aut}(F)$.

si en particulier il $\exists G$ sous groupe de $\text{Aut}(F)$ tq:

$$g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G$$

On dit qu'on a un G -fibré au sens de Steenrod.
 et G le groupe structural du Fibré E .

4 - Définition: $(\text{Top}_s \text{ et } \text{Top}_{sr})$ (avec la topologie de point-compact)

* $\text{Top}(M)$ le groupe des homéomorphismes $\phi : M \rightarrow M$

* $\text{Top}_s(M)$ le sous groupe des homéomorphismes $\phi : M \rightarrow M$

qui sont (stable) fixes en dehors d'un certain sous ensemble propre fermé de M .

* tout homéomorphisme de $M \rightarrow M$ est aussi naturellement un homéomorphisme de $\mathbb{F}_k(M)$ (coordonnée par coordonnée)

* soit $\mathbb{F}_k(M)$ l'espace de configuration pointé en

$$q = (q_1, \dots, q_k)$$

$$\text{On pose : } \text{Top}_{sr}(M) = \left\{ \phi \in \text{Top}_s(M) \mid \phi(q_i) = q_i \quad 1 \leq i \leq k \right\}$$

5. Lemme :

soit $D^m \subset \mathbb{R}^m$ le disque unité centré au zéro et \dot{D}^m son intérieur et $G_0(D^m)$ le groupe des homéomorphismes de D^m dans D^m qui laissent les bords fixes.

alors il existe une application continue :

$$\gamma : \dot{D}^m \longrightarrow G_0(D^m) \quad \text{tq} :$$

- 1) $\gamma(x)(x) = 0 \quad \forall x \in \dot{D}^m$
- 2) $\gamma(x)(y) = y \quad \forall x \in \dot{D}^m \text{ et } y \in \partial D^m$

Preuve : soient $g : \dot{D}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $h : \mathbb{R}^m \longrightarrow \dot{D}^m$

$$y \longmapsto \frac{y}{1-|y|} \qquad x \longmapsto \frac{x}{1+|x|}$$

ceux sont deux homéomorphismes inverses $g^{-1} = h$

On pose : $\gamma' : \dot{D}^m \times D^m \longrightarrow D^m$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} h(g(y) - g(x)) & \forall y \in \dot{D}^m \\ y & \forall y \in \partial D^m \end{cases}$$

soit alors $\gamma : \dot{D}^m \longrightarrow G_0(D^m)$ l'application qui à tout $x \in \dot{D}^m$ associe l'homéomorphisme $y \longmapsto \gamma'(x, y)$

6. Corollaire : il existe une application continue :

$$\gamma : U \longrightarrow \text{Top}_s(M) \quad \text{tq} :$$

- 1) $\gamma(u)(u) = x_0 \quad ; \quad \forall u \in U$
 - 2) $\gamma(u)(y) = y \quad \forall u \in U \text{ et } y \in M - U$
- (où $x_0 \in U$ un point fixé dans U et M variété diff connexe de dim m .)

Preuve
et U un ouvert de M

Preuve: fermeture (l'adhérence)

\bar{U} la ~~clôture~~ fermeture de U est homéomorphe à D^m d'une manière que $Fr(\bar{U})$ correspond à ∂D^m et x_0 à 0
et on applique le lemme précédent.

7. Théorème

la projection : $proj_{k,r} : F_k(M) \rightarrow F_r(M)$ $r < k$ est revêtement
un ~~fibré~~ au sens de Steenrod de $F_k(M)$ de fibre $F_{k-r,r}(M)$ et de groupe structural $Top_{sr}(M)$.

où $F_{k-r,r}(M) = F_{k-r}(M \setminus Q_r)$ et $Q_r = \{q_1, \dots, q_r\}$

Démonstration:

Étape 1: $proj_{k,r} : F_k(M) \rightarrow F_r(M)$, $1 \leq r < k$

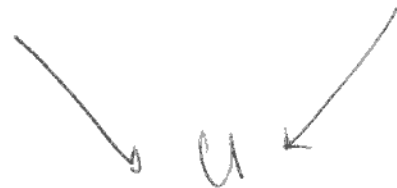
soit $(x_1, \dots, x_r) \in F_r(M) \Rightarrow x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$

soit U_i voisinage de x_i les U_i sont 2 à 2 disjoint

On considère pour tout $1 \leq i \leq r$ $\delta_i : U_i \rightarrow Top_s(M)$

On pose $U = U_1 \times \dots \times U_r$ et on a la trivialisation

locale : $U \times F_{k-r}(M \setminus Q_r^x) \xrightarrow{\phi'_U} proj^{-1}(U)$



où $Q_r^x = \{x_1, \dots, x_r\}$

ϕ définie par : $(x'_1, \dots, x'_r, y_{r+1}, \dots, y_k) \mapsto (x'_1, \dots, x'_r, \delta_{1(x'_1)}^{-1} \circ \dots \circ \delta_{r(x'_r)}^{-1})(y_i)$

* On veut vérifier que $(x_1, \dots, x_r, \delta_1^{-1} \circ \dots \circ \delta_r^{-1}(y)) \in \mathbb{F}_k(M)$ $\left(\begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)$

* Remarquons que : $y_j \mapsto \delta_r(x_r) \circ \dots \circ \delta_1(x_1)(y_j)$
 est un homéomorphisme.
 (préciser de U_i où se trouve y_j)

* Remarquons que ϕ'_u dépend de (x_1, \dots, x_r) et de U .

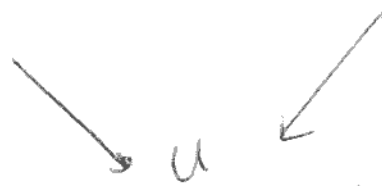
Étape 2 : pour se débarrasser de la dépendance de (x_1, \dots, x_r) ;

Supposons $\mathbb{F}_r(M)$ pointé en (q_1, \dots, q_r)
 d'après le corollaire précédent et la connectivité de M , il existe $\alpha_x \in \text{Top}_s(M)$

~~$\alpha_x(x_1, \dots, x_r)$~~ qui induit un homéomorphisme α'_x de $\mathbb{F}_{k-r}(M, Q_r) \rightarrow \mathbb{F}_{k-r}(M, Q_r^x)$
 (stable)

et on pose : $\phi_u = \phi'_u \circ (1 \times \alpha'_x)$

$$U \times \mathbb{F}_{k-r}(M, Q_r) \xrightarrow{\phi_u} \text{proj}^{-1}(U)$$



est la trivialisat[i]on locale demand[ée].

Etape 3: notons maintenant que ce revêtement est un fibré au sens de Steenrod de groupe structural $Top_{sr}(M)$.

en effet: soient U et V deux voisinage ouverts d'un recouvrement de $\mathbb{F}_r(M)$ vérifiant les conditions de trivialisations précédents.

On considère: $\phi_v^{-1} \phi_u: U \cap V \times \mathbb{F}_r(M|_{\mathcal{A}_r}) \rightarrow U \cap V \times \mathbb{F}_{k-r}(M|_{\mathcal{A}_r})$
 $(x, \overset{k-r}{y}) \mapsto (x, y')$

* On note que les ~~premières~~ ^{1^{ère}} coordonnées sont les mêmes.

et on considère l'application continue:

$$g: U \cap V \longrightarrow Top_{sr}(M)$$
$$x \longmapsto g_x: y \longmapsto y' \quad y \in \mathcal{A}_r.$$
$$\text{et } q_i \longmapsto q_i$$