1 _ Définition : (espace de conf.)

l'espace de configuration de la particule dans une variétée differentielle M st l'espace :

$$\mathbb{F}_k(M) = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in M^k \,/\, x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}$$ (cité $\mathbb{F}_2(M)$ comme exemple)

L'objet : établir une relation (application) $\mathbb{F}_k(M) \longrightarrow \mathbb{F}_r(M)$

parler de $\mathbb{F}_2(M)$

plus précisément. m. que $proj_{k,r} : \mathbb{F}_k(M) \longrightarrow \mathbb{F}_r(M)$.
st un revêtement. au sens de Steenrod.

2 _ Définition : (revêtement)

soit B un espace topologique, Un revêtement de B est
La donnée d'un espace topologique E . et d'une app. cont.
$p : E \longrightarrow B$ ayant la propriété de trivialisation
locale suivante :
$\forall b \in B$; $\exists$ V un voisinage de b dans B. et un espace
discret non vide F. et un homéomorphisme ϕ. tq :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & V \times F \arrow[dl, "proj_1"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

soit un diagramme commutatif.

- B s'appelle la base
- E l'espace totale
- F la fibre du revêt.
- ϕ la trivialisation locale au dessus de V.

3- Définition (au sens de Steenrod)

si (U_i) est un recouvrement ouvert de B. tq :
si (U_i) soient des trivialisations locales.

$\varphi_i : U_i \times F \longrightarrow p^{-1}(U_i)$ soient des trivialisations locales.

On peut déduire que : $\varphi_j \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times F$

sont des homéomorphismes de la forme $(x;e) \mapsto (x; g_{ji}(x)(e))$.

où $g_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow Aut(F)$.

si en particulier il $\exists$ G sous groupe de Aut(F) tq :

$g_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$

On dit qu'on a un G-fibré au sens de Steenrod.

et G le groupe structurel du Fibré E.

4 – Définition : (Top_s et Top_{sr}) (avec la topologie des ouvert-compact)

* $Top(M)$ le groupe des homéomorphismes $\phi : M \longrightarrow M$
* $Top_s(M)$ le sous groupe des homéomorphismes $\phi : M \longrightarrow M$ qui sont (stable) fixes en dehors d'un certain sous ensemble propre fermé de M.
* tout homéomorphisme de $\overset{M \longrightarrow M}{Top_s(M)}$ i^1 aussi naturellement un homéomorphisme de $F_k(M)$ (coordonée par coordonée)
* soit $F_k(M)$ ~~un~~ l'espace de configuration pointé en $q = (q_1, \ldots, q_k)$.

On pose : $Top_{sr}(M) = \{ \phi \in Top_s(M) \,/\, \phi(q_i) = q_i \ \ 1 \leq i \leq r \}$

5 - **Lemme :**

soit $D^m \subset \mathbb{R}^m$ le disque unité centré au zéro et $\mathring{D}^m$ son interieur et $G_0(D^m)$ le groupe des homéomorphismes de D^m dans D^m qui laissent les bords fixes.

alors il existe une application continue :

$$\gamma : \mathring{D}^m \longrightarrow G_0(D^m) \quad tq :$$

1) $\gamma(x)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathring{D}^m$

2) $\gamma(x)(y) = y \quad \forall x \in \mathring{D}^m$ et $y \in \partial D^m$

Preuve : soient $g : \mathring{D}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $h : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathring{D}^m$

$$y \longmapsto \frac{y}{1-|y|} \qquad x \longmapsto \frac{x}{1+|x|}$$

ceux sont deux homéomorphismes inverses $g^{-1} = h$

On pose : $\gamma' : \mathring{D}^m \times D^m \longrightarrow D^m$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} h(g(y)-g(x)) \,; & \forall y \in \mathring{D}^m \\ y & \forall y \in \partial D^m \end{cases}$$

soit alors $\gamma : \mathring{D}^m \longrightarrow G_0(D^m)$ l'application qui a tout $x \in \mathring{D}^m$ associe l'homéomorphisme $y \longmapsto \gamma'(x,y)$

6 - **Corollaire :** il existe une application continue :

$$\gamma : U \longrightarrow Top_s(M) \quad tq :$$

1) $\gamma(x)(x) = x_0 \;; \forall x \in U$

2) $\gamma(x)(y) = y \quad \forall x \in U$ et $y \in M \setminus U$

(où $x_0 \in U$ un point fixé dans U et M variété diff connexe) de dim m.

~~Preuve~~

et U un ouvert de M

Preuve :
$\bar{U}$ la ~~clôture~~ fermeture (l'adhérente) de U est homéomorphe à D^m d'une manière que $Fr(\bar{U})$ correspond à ∂D^m et x à 0
et on applique le lemme précédent.

~~soit~~

7. Théorème

la projection : $proj_{k,r} : \mathbb{F}_k(M) \longrightarrow \mathbb{F}_r(M)$ $r<k$ est un ~~fibré~~ revêtement au sens de Steenrod ~~de $\mathbb{F}_k(M)$~~ de fibre $\mathbb{F}_{k-r,r}(M)$ et de groupe structural $Top_{s,r}(M)$.

où $\mathbb{F}_{k-r,r}(M) = \mathbb{F}_{k-r}(M \setminus Q_r)$ et $Q_r = \{q_1, \dots q_r\}$

Démonstration :

Etape 1 : $proj_{k,r} : \mathbb{F}_k(M) \longrightarrow \mathbb{F}_r(M)$, $1 \leq r<k$

soit $(x_1, \dots x_r) \in \mathbb{F}_r(M) \Rightarrow x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$

~~soit~~ soit U_i voisinage de x_i tq les $(U_i)_i$ sont 2 à 2 disjoint

On considère pour tout $1 \leq i \leq r$ $\gamma_i : U_i \longrightarrow Top_s(M)$

On pose $U = U_1 \times \dots \times U_r$ et on a la trivialisation locale :

$$\begin{tikzcd} U \times \mathbb{F}_{k-r}(M \setminus Q_r^x) \arrow[rr, "\phi'_u"] \arrow[dr] & & proj^{-1}(U) \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

où $Q_r^x = \{x_1, \dots, x_r\}$

ϕ définie par : $(x'_1, \dots x'_r, y_{r+1}, \dots y_k) \longmapsto (x'_1, \dots, x'_r, \dots \gamma_1^{-1}(x'_1) \circ \dots \gamma_r^{-1}(x'_r)(y_j))$

* On vérifie que $(x_1', \dots, x_r', \gamma_1^{-1} \circ \dots \circ \gamma_r^{-1}(y)) \in \mathbb{F}_k(M)$.

* remarquons que : $y_j \mapsto \gamma_r(x_r') \circ \dots \circ \gamma_1(x_1')(y_j)$
est un homéomorphisme.
(préciser de U_i où se trouve y_j)

* Remarquons que Φ_U' dépend de $(x_1, \dots, x_r)$ et de U.

<u>Etape 2</u> : pour se débarrasser de la dépendance de $(x_1, \dots, x_r)$;
Supposons $\mathbb{F}_r(M)$ pointé en $(q_1, \dots, q_r)$
d'après le corollaire précédent et la connectivité de M. il existe $\alpha_x \in Top_s(M)$
qui induit un homéomorphisme α_x' de $\mathbb{F}_{k-r}(M \setminus Q_r) \longrightarrow \mathbb{F}_{k-r}(M \setminus Q_r^x)$
(stable)

et on pose : $\Phi_U = \Phi_U' \circ (1 \times \alpha_x')$

$$
\begin{tikzcd}
U \times \mathbb{F}_{k-r}(M \setminus Q_r) \arrow[rr, "\Phi_U"] \arrow[dr] & & pr^{-1}(U) \arrow[dl] \\
& U &
\end{tikzcd}
$$

est la trivialisation locale demandée.

<u>Etape 3</u> : notons maintenant que ce revêtement et un fibré au sens de Steenrod de groupe structurel $Top_{sr}(M)$.

en effet : soient U et V deux voisinage ouverts d'un recouvrement de $\mathbb{F}_r(M)$ verifiant les condishons de trivialisations précedents.

On considère : $\phi_V^{-1}\phi_U : U\cap V \times \mathbb{F}_{k-r}(M\setminus Q_r) \longrightarrow U\cap V \times \mathbb{F}_{k-r}(M\setminus Q_r)$

$$(x, y) \longmapsto (x, y')$$

* On note que les ~~pre~~ 1^{re} coordonnées sont les mêmes.

et on considère l'application continue :

$$g : U\cap V \longrightarrow Top_{sr}(M)$$

$$x \longmapsto g_x : y \longmapsto y' \quad y \notin Q_r.$$

$$\text{et } q_i \longmapsto q_i$$