# MODÈLE RATIONNEL DU COMPLÉMENTAIRE D'UN SOUS-POLYÈDRE DANS UNE VARIÉTÉ À BORD ET APPLICATIONS AUX ESPACES DES CONFIGURATIONS

Hector Cordova Bulens

# Remerciements

# Introduction

L'*espace des configeurations de $k$ points* dans une variété *Moints*

Question 1.

**Définition 1.7.** *Deux applications de $A$-dgmodules $f, g\colon M \to N$ sont* homotopes*, s'il existe une application de degré* $-1$*,* $h\colon M \to N$*, vérifiant l'égalité* $dh + hd = f$

pour $x$ $M$ x

*Démonstration.* Soit $H$ :

**Lemme 1.18** ([23], lemme 4.2). *Soit $(A, d)$ une ADGC et $f : (Q, d) \to (A, d)$ une application de $A$-dg(modul)es. Notons*

# CHAPITRE 2

## Homotopie rationnelle

La théorie de l'homotopie rationnelle étudie le type d'homotopie rationnelle des espaces topologiques. Connaître celui-ci permet une compréhension partielle du type d'homotopie. Un des avantages principaux de cette théorie est que l'on peut associer, à un espace, un objet algébrique (une ADGC) qui encode complètement le type d'homotopie rationnelle de cet espace.

Nous donnons, dans ce chapitre, quelques bases de cette théorie. Pour un aperçu complet de celle-ci et de ses applications, nous suggérons les références [8] et [9].

### 2.1 Rationalisation et type d'homotopie rationnelle

Commençons par les définitions de base :

**Définition 2.1.** *Un espace simplement connexe est dit* rationnel *si* $\pi\ (X)$ *est un* Q-*espace vectoriel*

Soit $Y$ un espace rationnel et $f : X \to Y$ une application continue entre espaces simplement connexes. Alors l'application

$\pi\ (f)!\ X\to X\!:\!X\pi\quad f)$ si$\pi\ X\to X\!X$ X *DØnition 2.1.*

*est un isomorphisme. Nous disons alors que* $X_{\mathbb{Q}}$ *est un* rationalisé *de* $X$.

Le théorème suivant garantit l'existence et l'unicité du rationalisé :

*X espace rationnet*

**Théorème 2.3.** *Soit* $X$

*est non dégénérée.*

De façon équivalente :

**Proposition 3.3.** *L'ADGC orientée* $(A, d, \ )$ *est à dualité de Poincaré de dimension formelle* $n$

La preuve du théorème repose sur le lemme suivant :

**Lemme 3.7.** *Soit* $(A, d, \ )$

En utilisant les résultats [24, section 4 et proposition 5.1], nous trouvons une extension

$$\gamma : (\tilde{A}, \tilde{d}$$

tel que $(\Lambda V, d)$ et $(\Lambda W, \delta)$ sont des modèles minimaux. Par connexité de $M$ et $K$ on a $V = V^{\geq r+1}$, $W = W^{\geq r+1}$ et $V^{r+1}$ $\ker d$ et $W^{r+1}$ $\ker d$. Comme

Td [(+374 Consimo)-1T0 [( )( [illegible] 0 Td [( )]TJ/F26 9.97416Tf

Il existe alors un idéal différentiel acyclique $I \quad \tilde{Q}$ tel que $\tilde{Q}^{>k} \quad I$. Posons

$$(Q, d_q) =$$

# CHAPITRE 4

## Modèle du complémentaire dans une variété fermée

Ce chapitre est un exposé d'une partie des résultats prouvés dans [23] et présentés aussi dans [9, Chapitre 8, section 8.1]. Le résultat du théorème 4.10 à la fin du chapitre est nouveau.

### 4.1 Introduction

soit un modèle d'ADGC de $A_{PL}(W \setminus K)$. Ce résultat montre que si $K$ et $W$ sont 1-connexes et $n \geq 2k + 3$, le type d'homotopie rationnelle du complémentaire ne dépend que de la classe d'homotopie rationnelle du plongement $f : K \to W$.

## 4.3. Modèle de $A_{PL}$

**Proposition 4.3.** *Soit $f : K \to W$ le plongement d'un sous-polyèdre $K$ de dimension $k$ dans une variété $W$ fermée, connexe, orientable de dimension $n$. Le cône algébrique de l'application de $A$*

## 4.4. Modèle de $\hat{A}$

Nous avons alors un zig-zag de morphismes d'ADGC

$A \quad \phi^!$

La composée

$$\phi^! := (\theta_P^{-1} \circ s^{-n}\#\phi) : s^{-n}\#Q \to s^{-n}\#P \xrightarrow{=} P$$

est un morphisme de $P$-dgmo $\#\phi$ $\#\phi$ H30 6.9738 Tf 6.227 9.0d [3.616n$\phi$’

# CHAPITRE 5

## Modèle de $F(M,2)$ quand $M$ est fermée et 2-connexe

### 5.1 Introduction

Bendersky et Gitler ([1]) étudient la cohomologie $H^*(F(M, k); \mathbb{Q})$ dans le cas où $M$ est une variété fermée. Ils montrent, dans ce cas-là, que la cohomologie de l'espace des configurations en tant qu'espace vectoriel peut-être calculée à partir d'un modèle d'ADGC de $M$

muni de la structure semi-triviale est une ADGC faiblement équivalente à $A_{PL}(F(M,2))$. [2] Une conséquence directe de ce résultat est que si $M$ est 2-connexe et de dim $M = n \geq 3$, alors le type d'homotopie rationnelle de l'espace $F(M,2)$ est complétement déterminé par le type d'homotopie rationnelle de $M$.

## 5.2 La classe diagonale $\Delta$ et le morphisme $\Delta^!$

Soit $(A, d, \ )$ une ADGC à dualit [(M)]78P(le)oincar272(dualit [(M)]7812 ense)-(M)]78form31(rae)-482(s

*Démonstration.* Pour montrer que $\Delta^!$ est un morphisme de $A \quad A$-modules nous utilisons la propriété de symmétrie de $\Delta$ décrite dans la proposition 5.1. En e□et, soient $a, b, c \quad A$ et posons $\quad = (-1)^{|a||c|+n(|b|+|c|)}$. D'un côté nous avons

$$\Delta((b \quad c) \cdot$$

pouvons supposer que $ss^{-n}x = ss^{-n}y = ss^{-n}1$. Pour la structure semi-triviale nous avons $ss^{-n}x = ss^{-n}1 = 0$.

Remarque =

Comme $A$ est à dualité de Poincaré nous avons un isomorphisme de $A$-dgmodules $\theta_A \colon A \to s^{-n}\#A$. Donc $s^{-2n}\#A$ est isomorphe en tant que $A \quad A$-dgmodule à $s^{-n}A$. La proposition 5.3 montre que l'application $\Delta^!$ est une shriek-map.

Rappelons que $C$

## 6.2 Modèle de $F(M,2)$ pour une variété 1-connexe de dimension paire

Soit $M$ une variété fermée 1-connexe de dimension paire. Le fait que la dimension de $n$

**Lemme 6.3.** *Soit $M$ une variété 1-connexe compacte sans bord de dimension $n$ impaire. Soit $\hat{A} \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(M)$ un quasi-isomorphisme d'ADGC. Nous pouvons construire un modèle relatif*

$$\hat{A} \quad \hat{A} \hookrightarrow (\hat{A} \quad \hat{A} \quad \wedge Z, D)$$

*de l'application $f : \hat{A} \quad \hat{A} \to A_{PL}(M \times M) \to A_{PL}(F(M,2))$, tel que $Z^{<n-1} = 0$ et $Z^{n-1} = \mathbb{Q}$.*

*Démonstration.* Pour $M$ une variété fermée orientable, nous savons que

$$H \ (F(M,2)) = \frac{H \ (M) \quad H \ (M)}{([\Delta])}, \tag{6.3}$$

où $([\Delta])$ est l'idéal engendré at $H(M)$

Passons à la démonstration du théorème.

*Démonstration du thèorème 6.1.* Soit $A$ un modèle de $M$ à dualité de Poincaré, 1-connexe et de dimension formelle $n$. Soit $\hat{A}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC

$(A, d$

**Proposition 6.8.** *Soit* $\xi \quad (A \quad A)^{2n-2}$. *Si* $n$ *est impair, il existe une structure d'ADGC sur* $C$ *compatible avec la structure de* $A \quad A$*-dgmodule telle que*

$$ss^{-n}1 \cdot ss^{-n}1 = \xi.$$

*Démonstration.* Munissons $C$ de la structure multiplicative décrite ci-dessous en posant $(ss^{-n}1)^2 = \xi$. Vérifions que $C$

allons introduire dans cette section une notion d'équivalence faible d'ADGC sous $A \quad A$

*Démonstration.* Par définition, $C(\xi)$ $_A$ $_A$ $C(\xi\ )$ si nous avons un diagramme commutatif de la forme

$$C(\xi)$$

$$\pi$$

$$A \quad A$$

où $\pi : C(\Delta$

et de l'autre

$$\psi(Dz_{61}) \quad = \quad \psi(u(1$$

de cette section nous exhibons un lien entre ces différentes structures multiplicatives et le groupe d'homologie $H_2(M;\mathbb{Q})$, lien dont une possible explication géométrique se trouve dans les travaux de N. Habegger dans [14].

Pour cela commençons par démontrer le résultat suivant :

**Proposition 6.13.** *Soit $A$ une ADGC 1-connexe à dualité de Poincaré de dimension formelle $n$ impaire et notons* A

*Démonstration.* Soit $A$ un modèle à dualité de Poincaré de $M$ de dimension formelle $n$ et soit $\hat{A}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC surjectifs

$$A \longleftarrow \hat{A} \longrightarrow A_{PL}(M)$$

Les ADGC $A$, $A \quad A$, $A_{PL}(M \times M)$ et $A_{PL}(F($

On pourrait espérer que l'existence de l'application d'ADGC $\hat{\tau}$ implique des conditions sur $\xi$. Le lemme 6.18 et la proposition 6.19 montrent que ce n'est malheureusement pas le cas.

Soit $\{a$

*et il existe un diagramme commutatif d'ADGC*

$$\begin{tikzcd} A \quad A \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "j"] & A \quad A \arrow[d, "j"'] \\ C(\xi) \arrow[r, "\hat{\tau}"] & C(\xi), \end{tikzcd}$$

*avec* $\hat{\tau} \circ \hat{\tau} = \mathrm{id}_{C(\xi)}$.

*Démonstration.* Choisissons $\xi$

$C(\xi)$

# CHAPITRE 7

## Modèle du complémentaire dans une variété à bord

### 7.1

grande codimension. Nous montrerons que nous pouvons construire un modèle d'ADGC de toute troncature en degré $N = 2(n$

et de l'autre côté, par définition,

$$\phi(dm) = (0, dm).$$

Supposons $f$

### 7.3.1 Modèle de dgmodule du complémentaire

Soit $\hat{A}$ une ADGC telle que l'on ait un zig-zag de quasi-isomorphismes d'ADGC

$$A \xleftarrow{\rho} \hat{A}$$

qui induit aussi un isomorphisme en cohomologie en degré $n-1$ et nous permet de définir

$$\Phi_{\partial_+ T} : A_{PL}(\partial_+ T, \partial_0 T) \to s^{-n} \# A_{PL}(\partial_+ T),\ \psi \to (\Phi_{\partial_+ T}(\psi) : \tau \to {}_{\partial_+ T}(\psi\tau))$$

qui, par dualité de Poincaré de la paire

Le résultat est une conséquence du lemme sur l'équivalence des cônes algé-

**Exemple 7.12.** *Soit $R$ un $A$-dgmodule gradué positivement. Notons $S$*

*qui fasse commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_M"'] & N \arrow[d, phantom, "\pi_M"] \\ {} & {} \end{tikzcd}$$

### 7.4.3 Modèle d'ADGC du complémentaire

Soit $f : K \to W$

*Démonstration.* Soit $\hat{A}$ une ADGC telle que nous avons des quasi-isomorphismes

Par minimalité, $V^{<n-k-1} = 0$. Comme $(\hat{A} \quad \Lambda V, D)$ est cofibrant et que

Comme $f(\ ) \cap \partial D^n = \ $, pour construire un modèle algébrique du complémentaire nous devons nous intéresser au carré

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] \arrow[d, dash] & \partial D^n = S^{n-1} \arrow[d, dash] \\
{} \arrow[r] & D^n,
\end{tikzcd}$$

dont un modèle d'ADGC est donné par

$$0 \xleftarrow{0} \mathbb{Q} \cdot \{1, u_{n-1}\}$$

$$\mathbb{Q}$$

# CHAPITRE 8

## Espaces des configurations dans une variété à bord

### 8.1 Introduction

Le reste de la section est consacré à la preuve du résultat.

A partir de l'application $\beta \colon B \longrightarrow \partial B$ nous allons construire un modèle du diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} A_{PL}(\partial(W \times W)) \arrow[r, "A_{PL}(\partial\Delta)"] & A_{PL}(\partial W) \\ A_{PL}(W \times W) \arrow[r, "A_{PL}(\Delta)"] \arrow[u] & A_{PL}(W). \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{8.3}$$

Pour cela, remarquons que nous av undiagramme

et

$$\lambda : \bar{B} \to A_{PL}$$

De plus, nous savons que $\mu\colon \hat{B} \quad \hat{B} \to \hat{B}$ est un modèle de la multiplication $\mu\colon A_{PL}(W) \quad A_{PL}(W) \to A_{PL}(W)$, ce qui finit de montrer que le diagramme (8.16) est un modèle du diagramme (8.12). Un raisonement tout à fait analogue montre que (8.16) est un modèle de (8.13) ce qui conclut la preuve du lemme.

*Démonstration.* Soit $\nu\colon \operatorname{hoker}\alpha \to \operatorname{hoker}\beta$ l'application de $B$-dgmodules induite entre les noyaux homotopiques des applications $\alpha$ et $\beta$

### 8.4.1 Un premier modèle de $F(M \setminus T, 2)$

À partir du modèle $\phi : P \longrightarrow Q$ de $f : K \to M$

En effet, nous calculons

$$\begin{aligned}
(\pi \quad \pi) \circ \Delta^!(s^{-n}a) &= (\pi \quad \pi)(\Delta \cdot (1 \quad a)) \\
&= (\pi \quad \pi)(\Delta)(\pi \quad \pi)(1 \quad a) \\
&= \Delta
\end{aligned}$$

Revenons au cube

$$\begin{tikzcd}
s^{-n}P \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "=" ', "\theta_P"] & & / \\
{} & &
\end{tikzcd}$$

*Démonstration.*

La variété privé d'un point, $\mathring{M}$

8.7. Conjecture sur le modèle de

[12] W. Fulton, R. MacPherson, *A Compactification of Configuration Spaces*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 139, No. 1 (Jan., 1994), pp. 183-225

[13] T. Goodwillie and M. Weiss, *Embeddings from the point of view of immersion theory*, Part II, Geometry and Topology 3 (1999), 103-118.

[14] N. Habegger, *On the existence and classification of homotopy embeddings of a complex into a manifold*, Thesis, University of Geneva (1981).

[15] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).

[16] K. Hess, *Rational homotopy theory : a brief introduction*, `arXiv:math/0604626`, 2006,

[17] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs 63, Amer- ican Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[18] J. F. P. Hudson, *PL embeddings*, Ann. of Math. (2) 85 (1967), 1-31

[19] J. F. P. Hudson. *Piecewise Linear Topology*, W. A. Benjamin, 1969.

[20] J. F. P. Hudson, *Concordance, is02002dson,*