Les groupes d'homotopie rationnelle d'un espace
L'état de la recherche

Yves Félix

Angers, Janvier, 2012

Soit (X, x_0) un espace topologique pointé.
Le $n^{\text{ème}}$ groupe d'homotopie de (X, x_0) est

$$\pi_n(X, x_0) = \frac{\{\, f : (S^n, *) \to (X, x_0) \,\}}{\sim \quad \text{homotopie}}$$

Pour X connexe par arcs, le groupe ne dépend pas du point x_0. On note

$$\pi_n(X) = \pi_n(X, x_0)\,.$$

Plan

1. Les groupes d'homotopie
2. les groupes d'homotopie rationnelle
3. la structure d'algèbre de Lie
4. L'intervention de l'algèbre homologique

- $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z} \qquad n \geq 1$
- $\pi_q(S^1) = 0\,, \qquad q > 1$
- $\pi_r(S^n) = 0\,, \qquad r < n$
- $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.
  Le générateur est donné par l'application de Hopf

$$S^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \backslash (0,0) \to \mathbb{C}P^1 = S^2\,.$$

- $\pi_q(\mathbb{C}P^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$

Théorème de Serre. Si X est un CW complexe fini (*par exemple une variété compacte*) 1-connexe (*c'est-à-dire* $\pi_1(X) = 0$), alors pour tout $n \geq 2$, $\pi_n(X)$ est un groupe abélien de type fini

$$\pi_n(X) = \mathbb{Z}^{a_n} \oplus T_n\,, \qquad\qquad T_n \,\text{groupe fini}\,.$$

Les groupes d'homotopie rationnelle sont les espaces vectoriels

$$\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{a_n}\,.$$

$\dim\, \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} = a_n = \text{rang}\ \pi_n(X)$.

L'idée de Sullivan pour une variété M

Soit

$$f : (\wedge V, d) \to A_{DR}(M)$$

un morphisme d'algèbres différentielles graduées réelles avec

1. $H(f)$ est un iso
2. $\wedge V =$ algèbre commutative libre sur V, c.a.d.
   $\wedge V =$ alg. symétrique sur $V^{pair} \otimes$ alg. extérieure sur $V^{impaire}$
3. $d(V) \subset \wedge^{\geq 2}(V)$

alors $\dim V^n = \operatorname{rang} \pi_n(M)$.

1. $f : (\wedge V, d) \to A_{DR}(M)$ morphisme d'alg. diff. grad.
2. $H(f)$ est un iso
3. $\wedge V =$ algèbre commutative libre sur V
4. $d(V) \subset \wedge^{\geq 2}(V)$

alors $\dim V^n = \operatorname{rang} \pi_n(M)$.

Exemple : $M = S^3$,

$$f : (\wedge x, 0) \to A_{DR}(M)\,,$$

$|x| = 3$
f envoie x sur la classe fondamentale.

1. $f : (\wedge V, d) \to A_{DR}(M)$ morphisme d'alg. diff. grad.
2. $H(f)$ est un iso
3. $\wedge V =$ algèbre commutative libre sur V
4. $d(V) \subset \wedge^{\geq 2}(V)$

alors $\dim V^n = \operatorname{rang} \pi_n(M)$.

Exemple : $M = S^2$,

$$f : (\wedge(x, y), d) \to A_{DR}(M)\,,$$

$|x| = 2$, $|y| = 3$, $dx = 0$, $dy = x^2$
f envoie x sur la classe fondamentale.

Exemples. (Serre)

- Si n est impair, $\pi_q(S^n) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{si } q = n \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$
- Si n est pair, $\pi_q(S^n) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{si } q = n, 2n-1 \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$

Le théorème de dichotomie

Soit X un CW complexe fini 1-connexe de dimension d.

On a alors l'une des deux situations suivantes :

1. (cas elliptique) $\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$ pour $n \geq 2d$
2. (cas hyperbolique)
   Pour tout entier N, il existe un n avec rang $\pi_n(X) \geq N$

Si X est **elliptique**, alors

- $\pi_n(X)$ est un groupe fini pour $n \geq 2d$.
- L'algèbre $H^*(X; \mathbb{Q})$ est une algèbre à dualité de Poincaré.
- La caractristique d'Euler de X est ≥ 0.
- On connaît toutes les suites possibles pour les rangs des groupes d'homotopie.
- $H_*(\Omega X; \mathbb{Z})$ n'a de la torsion que pour un nombre fini de premiers.

Exemple: Les sphères, les groupes de Lie, les espaces homogènes,...

Hyperbolique $\Rightarrow$ croissance exponentielle

Si X est hyperbolique, alors il existe un nombre $A > 1$ tel que pour tout entier r

$$\sum_{n=r+2}^{r+d} \operatorname{rank} \pi_n(X) \sim A^r .$$

Plus formellement, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $K = K(\varepsilon)$ tel que si $r \geq K$, alors

$$A^{(1-\varepsilon)r} \leq \sum_{n=r+2}^{r+d} \operatorname{rank} \pi_n(X) \leq A^{(1+\varepsilon)\,r} .$$

Les conjectures de Moore pour un CW 1-connexe de dimension d

1. (cas elliptique)
   - $\pi_n(X)$ est un groupe fini pour $n \geq 2d$
   - **Conjecture :**

$$\forall p, \forall N \geq d, \qquad \mathbb{Z}/p^N \not\subset \pi_*(X)$$

2. (cas hyperbolique)
   - Croissance exponentielle
   - Pour tout N, il existe un n avec rang $\pi_n(X) \geq N$
   - **Conjecture :** Pour tout groupe abélien G, il existe un entier n avec $G \subset \pi_n(X)$.

Les lacunes

On appelle *lacune de longueur p* une suite de p entiers consécutifs n_i avec $\pi_{n_i}(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$.

- Exemple : $S^n \vee S^n$.
  $\pi_i(S^n \vee S^n) \otimes \mathbb{Q} = 0$ sauf si $i = n, 2n-1, 3n-2, 4n-3, \ldots$
  On a des lacunes de longueur $n-2$.
- C'est le maximum : la longueur d'une lacune est $\leq d-2$.
- Ceci explique la somme dans l'expression

$$A^{(1-\varepsilon)r} \leq \sum_{n=r+2}^{r+d} \operatorname{rank} \pi_n(X) \leq A^{(1+\varepsilon)\, r}\, .$$

Le résultat de croissance est-il le meilleur possible ?

Théorème. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un K tel que pour tout $r \geq K$,

$$A^{(1-\varepsilon)r} \leq \sum_{n=r+2}^{r+d} \operatorname{rank} \pi_n(X) \leq A^{(1+\varepsilon)\,r}\,.$$

On voudrait éviter les grands bonds en passant d'un intervalle au suivant.

Théorème. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un K tel que pour tout $r \geq K$,

$$A^{(1-\varepsilon)r} \leq \sum_{n=r+2}^{r+d} \text{rank } \pi_n(X) \leq A^{(1+\varepsilon)\,r} \,.$$

Conjecture 1. Il existe un C et un K tel que pour tout $r \geq K$

$$\text{rank}\, \pi_{r+d+1}(X) \leq C \cdot \sum_{n=r+2}^{r+d} \text{rank } \pi_n(X) \,.$$

Le résultat de croissance est-il le meilleur possible ?

Théorème. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un K tel que pour tout $r \geq K$,

$$A^{(1-\varepsilon)r} \leq \sum_{n=r+2}^{r+d} \operatorname{rank} \pi_n(X) \leq A^{(1+\varepsilon)\,r}\,.$$

Conjecture 2. Il existe un K tel que pour tout $r \geq K$

$$\sum_{n=r+2}^{r+d} \operatorname{rank} \pi_n(X) = \frac{A^r}{r} + b_r$$

et la série $\sum b_r t^r$ a un rayon de convergence strictement plus grand que celui de la série $\sum A^r t^r$.

Rappel : $\pi_n(\Omega X) = \pi_{n+1}(X)$.

La suite des entiers

$$\text{rank } \pi_n(\Omega X)$$

est la suite des dimensions de l'algèbre de Lie

$$L_X = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}\,.$$

L'algèbre de Lie $L_X = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$

Le crochet de Whitehead : Soit $a : S^n \to \Omega X$ et $b : S^q \to \Omega X$.

$$\begin{tikzcd}
S^n \vee S^q \arrow[d] & \\
S^n \times S^q \arrow[r, "aba^{-1}b^{-1}"] \arrow[d] & \Omega X \\
S^{n+q} \arrow[ur, "{[a,b]}"'] &
\end{tikzcd}$$

L'algèbre de Lie $L_X = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$

Théorème. L_X est une algèbre de Lie graduée:

$$[a, b] = (-1)^{|a|\cdot|b|}[b, a]$$

$$(-1)^{|a|\cdot|c|}[a, [b, c]] + (-1)^{|b|\cdot|a|}[b, [c, a]] + (-1)^{|c|\cdot|b|}[c, [a, b]] = 0$$

Théorème de Milnor-Moore $UL_X = H_*(\Omega X; \mathbb{Q})$.

Exemples.

- Si $X = S^n$, alors $L_X = \mathbb{L}(a)$ avec a en degré $n-1$.
- $\mathbb{L}_{X\vee Y} = \mathbb{L}_X \coprod \mathbb{L}_Y$
- $\mathbb{L}_{X\times Y} = \mathbb{L}_X \times \mathbb{L}_Y$.

La dichotomie

1. (Elliptique) L_X est une algèbre de Lie nilpotente
2. (Hyperbolique) L_X est hautement non nilpotent :
   La réunion R_X des idéaux résolubles est de dimension finie.

Conjectures (X CW complexe hyperbolique de dimension d)

- $(R_X)_n = 0$ si $n \geq 2d$.
- $L_X \supset \mathbb{L}(x, y)$.

Structure des idéaux

Soit X hyperbolique de dimension d. Pour un idéal I, on note $I(t)$ la série

$$I(t) = \sum_{n \geq 1} \dim I_n t^n \,.$$

Deux idéaux I et J de L_X sont dits comparables ($\sim$) si pour tout idéal K il existe des nombres positifs A et r tels que pour tout n

$$(I \cap K)_n \leq A \cdot \sum_{i=n}^{n+r} (K \cap J)_i \,, \quad \text{et} \quad (K \cap J)_n \leq A \cdot \sum_{i=n}^{n+r} (K \cap I)_i \,.$$

Structure des idéaux

Deux idéaux I et J de L_X sont dits comparables ($\sim$) si pour tout idéal K il existe des nombres positifs A et r tels que pour tout n

$$(I \cap K)_n \leq A \cdot \sum_{i=n}^{n+r} (K \cap J)_i \,, \quad \text{et} \quad (K \cap J)_n \leq A \cdot \sum_{i=n}^{n+r} (K \cap I)_i \,.$$

Théorème.

1. Le nombre de classes est $\leq 2^d$.
2. Si I et J sont comparables, alors les séries $I(t)$ et $J(t)$ ont même rayon de convergence. Le nombre de rayons de convergence est $\leq d$.
3. $I \sim [I, I]$.

L'algèbre de Lie L_X

Théorème de Quillen. Toute algèbre de Lie graduée connexe, type fini, L, est de la forme L_X pour X un CW complexe 1-connexe type fini. [pas nécessairement fini].

Question. Quelles sont les conditions sur L pour que $L = L_X$ avec X un CW complexe fini ?

Réponse partielle. Si $L = L_X$ avec $\dim X = d < \infty$, alors

$$\mathrm{Ext}^q_{UL}(\mathbb{Q}, UL) \neq 0 \quad \text{pour un } q \leq d\,.$$

Définition.

$$\text{Profondeur de } L = \min\,\{q \,|\, \mathrm{Ext}^q_{UL}(\mathbb{Q}, UL) \neq 0\,\}\,.$$

Conséquence : $\Rightarrow$ Classification des algèbres de Lie de profondeur finie.

Problèmes d'algèbre homologique

Les recherches sur la structure de L_X, $H_*(\Omega X) = UL_X$ et $H_*(X^{S^1})$ conduisent à des problèmes du type suivant :

- Si prof $L < \infty$ et dim $L = \infty$, est-ce que $\mathrm{Tor}_0^{UL}(\mathbb{Q}, UL)$ a une croissance exponentielle ? [action adjointe]
- Que dire de la croissance des suites $\mathrm{Tor}_*^{UL}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ si prof $L < \infty$?
- Si dim $L = \infty$, prof $L < \infty$ et I est un idéal de dimension infinie, cet idéal a-il croissance exponentielle ?

Problèmes de dénombrabilité

Les types d'homotopie des CW complexes 1-connexes finis forment un ensemble dénombrable. Donc

- Les séries $\sum \operatorname{rang} \pi_n(X) t^n$ et $\sum \operatorname{rang} H_n(\Omega X; \mathbb{Q}) t^n$ forment un ensemble dénombrable de séries.
- Leurs rayons de convergence forment un sous-ensemble dénombrable de $[0, 1]$.

Quelles sont les propriétés de ces sous-ensembles ?