TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE : INTRODUCTION

MY ISMAIL MAMOUNI

Résumé. Le but de ce premier article dans une série de trois articles, est de donner les outils nécessaires, ceux de la topologie algébrique, pour faciliter la lecture du 3ème article, où il sera question d'énoncer et démontrer l'un des travaux de recherches de l'auteur.

Dans tout cet article, $\mathbb{Q}$ est le corps de bases de tous les espaces vectoriels considérés.

1. Introduction

La topologie algébrique, anciennement appelée topologie combinatoire, est une branche des mathématiques appliquant les outils de l'algèbre dans l'étude des espaces topologiques. Plus exactement, elle cherche à associer de manière naturelle des invariants algébriques aux structures topologiques associées.

L'idée fondamentale est de pouvoir associer à tout espace topologique des objets algébriques (nombre, groupe, espace vectoriel, ...), de sorte qu'à deux espaces homéomorphes sont associées deux structures isomorphes. De tels objets sont appelés des invariants algébriques. Comme exemple simple d'invariant topologique, $\pi_0(X)$: le nombre de composantes connexes d'un espace topologique X. L'une des applications célèbres de la topologie algébrique est le fameux théorème du point fixe de Brouwer : *toute application continue du disque unité de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même admet un point fixe.*

2. Un peu d'histoire

Initialement appelée topologie combinatoire car elle prend sa source avec le problème des ponts de Königsberg, la topologie algébrique (terme dû à Listing, tiré du grec logos = étude, raisonnement et topos = lieu, site), fondée par Henri Poincaré, initiée par Emmy Noether et développée par Hopf, est une branche récente et très complexe de la topologie.

3. Cohomologie

Un *complexe de cochaines* est une suite d'espaces vectoriels $(C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'applications linéaires $d^n : C^n \to C^{n+1}$ tels que $d^{n+1} \circ d^n = 0$. Autrement dit $\mathrm{Im}d^n \subset \ker d^{n+1}$. On pose alors $C = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} C^n$ et $d^n = d_{|C^n}$, et le couple (C,d) désignera dans la suite un complexe de cochaines. Les éléments de $\ker d$ s'appellent des *cocycles*, ceux de $\mathrm{Im}d$ des *cobords*. C'est *Emmy Noether* qui fût la première à définir le groupe abélien qui mesure l'obstruction pour un cocycle d'être un cobord :

$$H^n(C,d) = \ker d^{n+1}/\mathrm{Im}d^n \qquad (p-\text{ème groupe de cohomologie})$$

La *cohomologie* du complexe (C, d) est définit par la relation :

$$H^*(C, d) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^n(C, d)$$

Ainsi, tout cocycle x définit un élément $[x]$ dans $H^*(C, d)$, appelée sa classe de cohomologie. Un cocycle est un cobord si et seulement si sa classe de cohomologie est nulle.

Un morphisme de complexes de cochaines $\phi : (C, d) \to (D, d')$ est une application linéaire telle que $\phi^n = \phi_{|C^n} : C^n \to D^n$ avec

$$\phi \circ d = d' \circ \phi.$$

Autrement dit tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc}
C^0 & \xrightarrow{d} & C^1 & \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} & C^n & \overset{d}{\to} & C^{n+1} \longrightarrow \dots \\
\downarrow \phi^0 & & \downarrow \phi^1 & & \downarrow \phi^n & & \downarrow \phi^{n+1} \\
D^0 & \xrightarrow{d'} & D^1 & \xrightarrow{d'} \dots \xrightarrow{d'} & D^n & \xrightarrow{d'} & D^{n+1} \longrightarrow \dots
\end{array}$$

On peut définir d'une façon naturelle la composée de deux morphismes de cochaines, ainsi que le morphisme identité. Ainsi un morphisme de complexes de cochaines $\varphi : C \to D$ envoie cocycles sur cocycles et cobords sur cobords en chaque étage de la cohomologie et induit un morphisme de groupes abéliens sur les groupes de cohomologie en posant

$$\begin{array}{cccc}
H^*(\varphi) : & H^*(C) & \longrightarrow & H^*(D) \\
 & [x] & \longmapsto & [\varphi(x)]
\end{array}$$

Il est facile de vérifier que :

$$H^*(g \circ f) = H^*(f) \circ H^*(g) \text{ et que } H^*(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{H^*(C)}$$

4. Homologie

Un *complexe de chaines* est une suite d'espaces vectoriels $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et d'applications linéaires $d_n : C_n \to C_{n-1}$ tels que $d_{n-1} \circ d_n = 0$. On pose alors $C = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} C_n$ et $d_n = d_{|C_n}$, et le couple (C, d) désignera dans la suite un complexe de chaines. Les éléments de $\ker d$ s'appellent des *cycles*, ceux de $\mathrm{Im} d$ des *bords*. L'*homologie* du complexe (C, d) est définit par les relations :

$$H^n(C, d) = \ker d^{n+1} / \mathrm{Im} d^n \qquad (p - \text{ème groupe d'homologie})$$

$$H^*(C, d) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^n(C, d)$$

Un morphisme de complexes de chaines $\phi : (C, d) \to (D, d')$ est une application linéaire telle que $\phi_n = \phi_{|C_n} : C_n \to D_n$ avec

$$\phi \circ d = d' \circ \phi.$$

Autrement dit tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc}
C_0 & \xleftarrow{d} & C_1 & \xleftarrow{d} \dots \xleftarrow{d} & C_n & \overset{d}{\leftarrow} & C_{n+1} \longleftarrow \dots \\
\downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_{n+1} \\
D_0 & \xleftarrow{d'} & D_1 & \xleftarrow{d'} \dots \xleftarrow{d'} & D_n & \xleftarrow{d'} & D_{n+1} \longleftarrow \dots
\end{array}$$

On peut définir d'une façon naturelle un morphisme de groupes abéliens sur les groupes d'homologie en posant

$$\begin{array}{rccc} H_*(\varphi): & H_*(C) & \longrightarrow & H_*(D) \\ & [x] & \longmapsto & [\varphi(x)] \end{array}$$

Il est facile de vérifier que :

$$H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(g) \text{ et que } H_*(\mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_{H_*(C)}$$

5. Dualité homologie-cohomologie

Elle existe un dualité naturelle entre les notions d'homologie, plus précisément la donnée d'un complexe de chaine permet de construire un complexe de cochaines et inversement, et donc la donnée de l'une (homologie ou cohomologie) permet de construire l'autre. Considérons par exemple la donnée complexe de chaines (C, d), on définit complexe de cochaînes dual (C^*, d^*) par les relations suivantes :

- $C^n = (C_n)^*$, espace dual de C_n,
- $d^n = (d_{n+1})^*$, application linéaire transposée de d_{n+1},

Rappelons qu'en général si $f : X \to Y$ est une application linéaire et Z un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel quelconque, on pose

$$\begin{array}{rccc} f^*: & L(Y,Z) & \longrightarrow & L(X,Z) \\ & g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

6. Suites exactes

Une *suite exacte courte* de complexes de chaines est la donnée de complexes de cochaines (C, D, E) et de morphismes de complexes de cochaines $f : C \to D, g : D \to E$ tels que pour tout n la suite de morphismes de modules $0 \to E_n \stackrel{f_n}{\to} F_n \stackrel{g_n}{\to} G_n \to 0$ soit exacte, c'est à dire : f_n injective, g_n surjective avec $\mathrm{Im} f_n = \ker g_n$.

Théorème : *Lemme des serpents ou des zigzags.*

Soit $0 \to E \stackrel{f}{\to} F \stackrel{g}{\to} G \to 0$ *une suite exacte courte de complexes de chaines, alors il existe une suite exacte longue*

$$\begin{array}{lllllll} \downarrow \delta & & & & & & \\ H_n(C) \stackrel{H_*(f)}{\longrightarrow} H_n(D) \stackrel{H_*(g)}{\longrightarrow} & H_n(E) & & & & & \\ & \downarrow \delta & & & & & \\ & H_{n-1}(C) \stackrel{H_*(f)}{\longrightarrow} H_{n-1}(D) \stackrel{H_*(g)}{\longrightarrow} & H_{n-1}(E) & & & & \\ & & \downarrow \delta & & & & \end{array}$$

δ *s'appelle le connectant de la suite exacte.*

Preuve. Construisons tout d'abord le morphisme $\delta : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$.

Soit z un n-cycle de E, on désire lui associer un n-cycle x de C et un seul modulo un bord. Comme g_n est surjective il existe $y \in D_n$ tel que $g_n(y) = z$, d'autre part $dy \in D_{n-1}$ et $g_n(dy) = dg_n(y) = dz = 0$, donc, par exactitude $dy \in \ker g_n = \mathrm{Im} f_{n-1}$, il existe donc $x \in C_{n-1}$ tel que $f_{n-1}(x) = dy$. On pose alors $\delta[z] = [x]$.

Vérifions maintenant que δ est bien défini.

Tout d'abord x est bien un cycle car $f_{n-2}(dx) = df_{n-1}(x) = ddy = 0$, or f_n est injective par exactitude, d'où $dx = 0$.

D'autre part $[x]$ ne dépend pas des choix de z dans $[z]$ ni des éléments y, x qui interviennent dans la construction ci dessus.

En effet soit z', y', x' un autre choix, alors $[z'] = [z], g(y') = z', f(x') = y'$, on te les indices sans crainte de perdre la généralité. donc $\exists z" \in E$ tel que $z - z' = dz"$ et soit $y" \in D$ tel que $z" = g(y")$, il existe grâce à la surjection de g de l'exactitude. Donc $g(y - y' - dy") = z - z' - g(dy") = z - z' - dg(y") = z - z' - dz = 0"$, en utilisant l'exactitude encore une fois au niveau de D, soit $x" \in C$ tel que $y - y' - dy" = f(x")$, alors $f(x - x' - dx") = dy - dy' - df(x") = ddy" = 0$, or f est injective, d'o $x - x' - dx" = 0$, et donc $[x] = [x']$.

Vérifions maintenant l'exactitude de la suite au niveau de $H_n(D)$, c'est à dire $\mathrm{Im} H_*(f) = \ker H_*(g)$.

On sait que $H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(f)$, et $g \circ f = 0$ d'où $H_*(g) \circ H_*(f) = 0$ et donc $\mathrm{Im} H_*(f) \subset \ker H_*(g)$.

Réciproquement soit y un cycle tel que $[y] \in \ker H_*(g)$, d'où $[g(y)] = H_*(g)(y) = 0$ et donc $g(y)$ est bord, soit $z \in E$ tel que $g(y) = dz$ et soit $y' \in C$ tel que $z = g(y')$, il existe puisque g est surjective, donc $g(y - dy') = 0$, car g commute avec d, d'après l'exactitude $y - dy' \in \mathrm{Im} f$, soit donc $x \in C$ tel que $y - dy' = f(x)$, donc $[y] = [f(x)]$. D'autre part $f(dx) = df(x) = dy - ddy' = 0$ car y cycle, et comme f est injective alors x est un cycle et donc $H_*[x] = [f(x)] = [y]$, d'où $[y] \in \mathrm{Im} H_*(f)$.

Vérifions ensuite l'exactitude au niveau de $H_n(E)$, c'est à dire montrons que $\mathrm{Im} H_*(g) = \ker \delta$. Si y est un cycle de D, posons $z = g(y)$ et $x \in E$ tel que $[x] = \delta[z]$, donc par construction de δ on a $f(x) = y$ Comme y est un cycle et f injective, d'où $x = 0$ et donc $\delta \circ H_* g([y]) = \delta[g(y)] = \delta[z] = [x] = 0$, d'où $\delta \circ H_*(g) = 0$ et donc $\mathrm{Im} H_*(g) \subset \ker \delta$.

Réciproquement montrons que $\ker \delta \subset \mathrm{Im} H_*(g)$. Soit z un cycle de E tel que $\delta[z] = 0, \quad x \in C, y \in D$ construits comme précédemment tels que $z = g(y)$ et $f(x) = dy$ donc $[x] = \delta[z] = 0$, d'où x est un bord, soit $x' \in C$ tel que $x = dx'$ et $y' = y - f(x')$, donc $g(y') = y = z$ car $g \circ f = 0$ en raison de l'exactitude de la suite courte, en plus $dy' = dy - df(x') = df(x) - f(dx') = 0$, donc y' est un cycle de D, donc $H_*(g)[y] = [g(y)] = [z]$, d'où $[z] \in \mathrm{Im} H_*(g)$.

Et de même on vérifie l'exactitude au niveau de $H_n(E)$, c'est à dire montrer que $\mathrm{Im}\delta = \ker H_*(f)$. En effet, avec les notations précédentes $H_*(f)(\delta[z]) = H_*(f)[x] = [f(x)] = [dy] = 0$.

7. Homologie singulière

On se propose dans la suite de construire pour tout espace topologique X, une homologie particulière, $H_*(X; \mathbb{Q})$ dite *homologie singulière* de X à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, on appelle *p-simplexe standard*, l'ensemble

$$\Delta_p = \{(t_0, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \text{ tel que } 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=0}^{p} t_i = 1\},$$

autrement dit l'enveloppe convexe de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+1}$. On appelle *p-simplexe singulier* de X, toute application continue $\sigma_p : \Delta_p \to X$. On note par $C_p(X)$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré des p-simplexes singuliers, ses éléments sont de la forme $\sigma = \sum_{\text{fini}} n_\alpha \sigma_{\alpha,p}$ (où $n_\alpha \in \mathbb{Q}$) et sont appelés des *p-chaînes singulières.*

Le *morphisme de bord* $d : C_p(X) \to C_{p-1}(X)$ est défini par les relations

$$\begin{aligned} d_i\sigma_{\alpha,p}(t_0,\dots,t_{p-1}) &= \sigma_{\alpha,p}(t_0,\dots,t_{i-1},0,t_i,\dots,t_{p-1}) \\ d\sigma &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i d_i\sigma \end{aligned}$$

On vérifie (laissé au lecteur acharné) que $d^2 = d\circ d = 0$. On obtient ainsi le complexe de chaînes (C,d), dont l'homologie associée $H_*(C,d)$ est appelée homologie singulière de X et notée $H_*(X,\mathbb{Q})$

$$H_*(X,\mathbb{Q}) := H_*(C,d)$$

Cas particulier $X = \{x\}$: Le seul p-simplexe possible est l'application constante $\sigma_p : \Delta_p \to \{x\}$, ainsi $C_p(X) = \mathbb{Q}$ et $d_i\sigma_p = \sigma_{p-1}$ et

$$d\sigma = \left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\right)\sigma_{p-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ pair} \\ \sigma_{p-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le complexe de chaînes singulières est alors

$$\mathbb{Q} \xleftarrow{0} \mathbb{Q} \xleftarrow{id} \mathbb{Q} \xleftarrow{0} \mathbb{Q}\cdots$$

et l'homologie singulière est alors

$$H_n(\{x\},d) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remerciements : Okacha Diyer, professeur agrégé en mathématiques, enseignant aux CPGE Omar Ibn Abdelaziz, Oujda, pour la deuxième lecture.

Références

[1] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002), 281-283

[2] H. Poincaré, *Oeuvres complètes*, Graduate Texts in Math. Vol. **6** (1953), Gauthier-Villars, Paris.

Agrégé-Docteur, CPGE My Youssef, Rabat, Maroc
E-mail address: `mamouni.myismail@gmail.com`