Le 07/11/2015 - CRMEF Cours de HILALI

Sur les espaces elliptiques

X espace 1-connexe avec $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) < \infty$

1) **Définition** X est dit elliptique ssi

$$\dim \pi_*(X)\otimes\mathbb{Q} < \infty$$

Sinon X est dit hyperbolique

Problème: Comment reconnaître t-on les espaces elliptiques?

Version algébrique

Soit $(\Lambda V, d)$ un modèle de Sullivan de X

i.e. $\Lambda V = \mathbb{Q}[V^{pair}] \otimes \Lambda V^{impair}$

Si $V^{pair} = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_p] = Hom(\pi_{pair}(X);\mathbb{Q})$

$V^{impair} = \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_q] = Hom(\pi_{impair}(X);\mathbb{Q})$

$$\omega \in \Lambda V \Leftrightarrow \omega = \sum_{1\le i_1 < \dots < i_k \le q} P_{i_1 \dots i_k}\, y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_k}$$

$P_{i_1\dots i_k}$ polynôme en $x_1, \dots, x_p$

Remarque $p = \dim V^{pair} = \dim \pi_{pair}(X)\otimes\mathbb{Q}$

$q = \dim V^{impair} = \dim \pi_{impair}(X)\otimes\mathbb{Q}$

d est une différentielle vérifiant $d^2 = 0$

d de degré 1

i.e. si $\omega \in (\Lambda V)^k$ alors $d\omega \in (\Lambda V)^{k+1}$

où $(\Lambda V)^k$ est l'ensemble des éléments de degré k.

- $\exists$ une base $\{v_1, \dots, v_n\}$ ($n = p+q$) de V telle que $dv_i \in \Lambda^{\geq 2}\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ $(*)$

avec $\Lambda^i A = \left\{ \sum_{j_1 < \dots < j_i} z_{j_1} \wedge \dots \wedge z_{j_i},\ z_{j_l} \text{ homogène} \in A \right\}$

~~Cette~~ La condition $(*)$ s'appelle condition de minimalité.

- $H^*(\Lambda V, d) \cong H^*(X;\mathbb{Q})$

Définition algébrique X est elliptique ssi

- $\dim V < \infty$
- $\dim H^*(\Lambda V, d) < \infty$

. Dimension formelle de X, $fd(X)$

$$fd(X) = \max\{k \,;\, H^k(X;\mathbb{Q}) \neq 0\}$$
$$= \max\{k \,;\, H^k(\Lambda V, d) \neq 0\}$$

Caractéristique cohomologique d'Euler-Poincaré $\chi_c(X)$,

$$\chi_c(X) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X;\mathbb{Q})$$
$$= \dim H^{pair}(X;\mathbb{Q}) - \dim H^{impair}(X;\mathbb{Q})$$

Caractéristique homotopique d'Euler-Poincaré

$$\chi_\pi(X) := \sum_{i\geq 2} (-1)^i \dim \pi_i(X)\otimes\mathbb{Q}$$
$$= \dim \pi_{pair}(X)\otimes\mathbb{Q} - \dim \pi_{impair}(X)\otimes\mathbb{Q}$$
$$= \dim V^{pair} - \dim V^{impair}$$
$$= p - q$$

. décomposition de d

$d = d_{-1} + d_0 + d_1 + \cdots + d_k + \cdots$

$d_k x_i \in \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_p] \otimes \Lambda^k\{y_1,\dots,y_q\}$

$d_k y_j \in \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_p] \otimes \Lambda^{k+1}\{y_1,\dots,y_q\}$

Cas de d_{-1} : $d_{-1} x_i = 0$, $d_{-1} y_j = P_j \in \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_p]$

$d_{-1}\circ d_{-1} = 0$

Conclusion $(\Lambda V, d_{-1})$ est un modèle de Sullivan de X.

appelé modèle pur

X est dit pur si $d = d_{-1}$

Exemple.

S^n est pure

n pair $\Lambda V = \Lambda(x,y)$ où $dy = x^2$, $|x| = n$, $dx = 0$

n impair $\Lambda V = \Lambda x$, $dx = 0$

. Théorème principal. X est elliptique

(1) $\dim \pi_*(X)\otimes\mathbb{Q} \leq fd(X)$

(2) $\pi_k(X)\otimes\mathbb{Q} = 0$

$\forall k \geq fd(X)+1$, k pair

(3) $\pi_k(X)\otimes\mathbb{Q}=0$

$\forall k \geq fd(X)+1$, k impair au plus pour un $k\in [\![fd(X)+1, 2fd(X)-1]\!]$

(4) $\chi_\pi(X)\leq 0$, $\chi_c(X)\geq 0$

(5) On a équivalence

(a) $\chi_\pi(X)=0 \iff q=p$

(b) $\chi_c(X)>0$

(c) $H^{\text{impair}}(X;\mathbb{Q})=0$

(d) $\dim \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_p]/(P_1,\dots,P_p)<\infty$

$\{P_1,\dots,P_p\}$ est une suite régulière si on choisit $\begin{cases}|x_1|\geq\dots\geq|x_p|\\ |y_1|\geq\dots\geq|y_p|\end{cases}$

$(P_1,\dots,P_p)$ l'idéal engendré par $\{P_1,\dots,P_p\}$

(6) On a équivalence

(a) $\dim H^*(\Lambda V,d)<\infty$

(b) $\dim H^*(\Lambda V,d_1)<\infty$

(c) $\dim \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_p]/(P_1,\dots,P_q)<\infty$

(d) X elliptique

2) <u>Complexe de Koszul</u>

R algèbre commu. sur $\mathbb{Q}$

(Par exemple $R=\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_p]$)

tout d'abord définissons pour $P\in R$, le complexe de Koszul $K(P)$ associé à P.

<u>Définition</u>. P est dite régulière si

$r\cdot P=0 \implies r=0 \quad \forall r\in R$

P n'est pas un diviseur de zéro.

On définit le complexe de cochaînes $K(P)$

$$0\to R\xrightarrow{\delta_1} R\xrightarrow{\delta_0} 0$$
$$r\longmapsto r\cdot P$$

$C_1(P)=R$, $C_0(P)=R$

$H_0(K(P))=R/(P)$, $H_1(K(P))=\ker\partial_1=\{r\in R;\ r\cdot P=0\}$

Remarque. Si P est régulière, l'homologie de $K(P)$ est concentrée en 0.

Maintenant soit $\{P_1, \dots, P_q\}$ une suite d'éléments de R.

$\forall i \in [\![1, q]\!]$, on note $\bar{P}_i \in R/(P_1, \dots, P_{i-1}) = R_i$

Définition. $\{P_1, \dots, P_q\}$ est dite régulière si $\forall i \in [\![1, q]\!]$ $\bar{P}_i$ est régulière dans R_i.

On définit le complexe de Koszul $K(P_1, \dots, P_q)$ par $K(P_1, \dots, P_q) = K(P_1) \otimes \cdots \otimes K(P_q)$.

On a $H_0(K(P_1, \dots, P_q)) = R/(P_1, \dots, P_q)$

$H_1(K(P_1, \dots, P_q)) = 0$ si $(P_1, \dots, P_q)$ est régulière.

Lemme. $K(P_1, \dots, P_q) \cong (\Lambda(P_1, \dots, P_q, t_1, \dots, t_q) / dt_i = P_i)$

Proposition. $(\Lambda V, d_{-1}) \cong K(P_1, \dots, P_q)$ avec $R = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_p]$

Calcul de $fd(X)$. On pose $|x_i| = 2a_i$, $|y_j| = 2b_j - 1$

on a $d_{-1} y_j = P_j$, $|P_j| = 2b_j$

$|x_1| \geq \cdots \geq |x_p|$ et $|y_1| \geq \cdots \geq |y_q|$

Lemme. $fd(\Lambda V, d) = fd(X) = fd(\Lambda V, d_{-1})$

Proposition. $fd(X) = \sum_{j=1}^{q} |P_j| - \sum_{i=1}^{p} |x_i| + p - q$, $b_i \geq a_i$ $\forall 1 \leq i \leq p$

on admet la proposition

$$\begin{aligned}
fd(X) &= \sum_{j=1}^{q} |P_j| - \sum_{i=1}^{p} |x_i| + p - q \\
&\geq \sum_{j=1}^{q} |P_j| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} |P_i| + p - q \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p} |P_j| + \frac{1}{2} \sum_{p+1}^{q} |P_j| + p - q \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{1}^{p} |P_j| + \frac{1}{2} \sum_{p+1}^{q} 4 + p - q \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{1}^{q} |P_j|
\end{aligned}$$

$\forall j \quad fd(X) \geq \frac{1}{2} |P_j|$

$|P_j| \leq 2\, fd(X) \Rightarrow 2\, fd(X)$

$\Rightarrow |y_j| \leq 2\, fd(X) - 1$

s'il existe j_1, j_2 ; $fd(X) \leq |y_{j_1}| \leq |y_{j_2}| \leq 2\, fd(X) - 1$

alors $fd(X) \geq \frac{1}{2} \sum |P_j|$

$$\geq \frac{1}{2}(|P_{j_1}| + |P_{j_2}|)$$

$$\geq \frac{1}{2}(|y_{j_1}| + |y_{j_2}| + 2)$$

$$> fd(X)$$

D'autre part $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $|P_i| \geq 2|x_i|$

$fd(X) \geq \frac{1}{2} |P_i| \geq |x_i|$.