

Introduction à l'équivariante Cohomologie.

Definitions et Propriétés:

- Groupe de Lie: Soit G un groupe de Lie (ie variété différentiable avec $\text{mul} : G \times G \rightarrow G$ et $\text{in} : G \rightarrow G$ sont lisses (C^∞)).
- Nous considérons ici le groupe linéaire (ie, les sous-groupes de $GL(n) = GL(n, \mathbb{C})$ pour $n \in \mathbb{N}$).
Un groupe de Lie connexe et compact est appelé tore, explicitement ils sont sous forme de produits $U(1)^n$ du cercle $U(1) = \{ e^{it} \mid t \in \mathbb{R} \} = S^1$ s'il est abélien.
- Espace Classifiant: On prend un groupe de Lie G agissant sur un espace topologique (de manière continue). Nous disons que l'action est libre si le $G_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$ $\forall x \in X$ sont le sous-groupe trivial.

Theorem: Pour tout groupe de Lie compact G , il existe un espace topologique contractible EG sur lequel G agit librement.

Preuve: on montre pour $G = GL(n)$, on prend le ^{espace} A_m l'espace des matrices à n lignes et $m > n$ de rang n .

G agit librement sur A_m mais le A_m ne sont pas contractible. ^{ou homotopique}
car $\dim A_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$ est par contre contractible.

Définition: L'espace clarifiant du groupe G est le quotient $BG = EG/G$, $\mathcal{U}$ est unique à homotopie près. Puisque l'action de G sur EG est libre, alors chaque fibre de l'application quotient $\pi: EG \rightarrow BG$ est une orbite Gx homéomorphe à G .

Exemples:

$$1) \quad ES^1 = S^\infty, \quad BS^1 = S^\infty/S^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{CP}^\infty$$

$$B(\mathbb{Z}_2) = S^\infty/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{RP}^\infty, \quad \mathcal{U} \text{ est connu que}$$

$$H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}[t]/t^{n+1}$$

$$2) \quad \text{Pour } G = G_1 \times G_2, \quad EG = EG_1 \times EG_2 \text{ et } BG = BG_1 \times BG_2$$

$$\text{en particulier } B(S^1 \times \dots \times S^1) = \mathbb{CP}^\infty \times \dots \times \mathbb{CP}^\infty \text{ et}$$

$$H^*(B(S^1 \times \dots \times S^1)) = H^*(BS^1 \times \dots \times BS^1) \cong H^*(BS^1) \otimes \dots \otimes H^*(BS^1)$$

$$\cong \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n].$$

L'équivariant Cohomologie:

Soit G un groupe topologique agissant sur un espace topologique X . Quand l'action n'est pas libre X/G peut être incalculable. L'idée de Borel est de remplacer X par un G -espace homotopiquement équivalent à X soit $X^\dagger = X \times EG$ sur lequel G agit diagonalement $g \cdot (x, e) = (g \cdot x, g \cdot e)$.

Définition: Le quotient d'homotopie du G -espace X est $X_G = X \times_G EG = (X \times EG)/G$.

L'équivariant cohomologie de X est $H_G^*(X) = H^*(X_G)$.

Propriétés:

$$1) H^*(X/G) = H^*(X_G) \cong H^*(X/G)$$

Minoration de $\lim H^*(X; \mathbb{Q})$.

On prend un e. t. X muni d'une action presque libre du tore T^n ; On considère la fibration de Borel:

$$X \longrightarrow X_{T^n} \longrightarrow B_{T^n}$$

X_{T^n} admet un modèle minimal de la forme:

$$D_{T^n}(X) = (H^*(B_{T^n}; \mathbb{C}) \otimes H^*(X; \mathbb{C}), \tilde{d})$$

en tant que $H^*(B_{T^n}, \mathbb{C})$ -module

$$H^*(B_{T^n}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n] \text{ comme vu précédemment.}$$

On définit une filtration $\uparrow F_q$ sur $H^*(X, \mathbb{C})$ par:

$$F_{-1} = 0$$

$$F_q = \{x \in H^*(X, \mathbb{C}) \mid \tilde{d}(x) \in H^*(B_{T^n}, \mathbb{C}) \otimes F_{q-1}\}$$

on définit $l = l(x)$ la longueur de $H^*(X, \mathbb{C})$

$$l = \inf \{q \in \mathbb{N} \mid F_q = H^*(X, \mathbb{C})\}$$

Localisation:

$$\text{Si } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$$

$$\text{On pose } D_{T^n}(X)^\alpha = \mathbb{C} \otimes_{H^*(B_{T^n}, \mathbb{C})} D_{T^n}(X)$$

On la structure de $H^*(B_{T^n}, \mathbb{C})$ -module est définie via l'appⁿ:

$$H^*(B_{T^n}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t_i \longmapsto \alpha_i$$

D'après un théorème de Puppe si $\alpha \neq (0, \dots, 0)$

$$\text{Alors } H^*(D_{T^n}(X)^\alpha, \tilde{d}_\alpha) = 0$$

Pour tout $q, 0 \leq q \leq l$ On pose.

$$F_q = A_q \oplus F_{q-1}$$

et on peut prendre

$$\tilde{J}(A_q) \subset H^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \otimes A_{q-1}$$

Théorème: Noton $\text{rank}(x)$, alors

- (a) Si $n \equiv 1[4]$, alors $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq \frac{1}{2}(n^2 + 3n)$
- (b) Si $n \equiv 3[4]$, alors $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq \frac{1}{2}(n^2 + n + 8)$
- (c) Si n est pair $\neq 0$ et 4 alors $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 4)$
- (d) Si $n = 4$, alors $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq 14$.

Problème: M_9 $\dim H^*(X, \mathbb{Q}) \geq 16 = 2^4$.

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant:

lemme: On a

a) $\dim A_q \geq n$, pour $q = 1$ ou $q = l-1$

b) $\dim A_q + \dim A_{q-2} \geq n$, $\forall q, 2 \leq q \leq l$.

→ On sait aussi d'après Puppe que $\dim A_q \geq 2 \quad \forall q, 1 \leq q \leq l-1$.

* Pour $n = 4$ on a

On a

$$\begin{aligned} \dim H^*(X, \mathbb{Q}) &\geq 2(l-1)n + \underbrace{(m_{n-6} + m_n)}_{m_1} + (m_0 + m_2) + m_{l-1} + m_l \\ &\geq 13 \end{aligned}$$

$$\text{Or } X_c(X) \Rightarrow \Rightarrow \dim H^*(X; \mathbb{Q}) \geq 14$$