

Suites Spectrales Impaires

Problème Déterminer $H^*(X; \mathbb{k})$?

Méthode: Suite spectrale qui est une approximation de l'homologie

1) Suite spectrale

Une suite spectrale est déterminée par:

(i) $(E_r^{p,q})_{r \in \mathbb{N}, (p,q) \in \mathbb{Z}^2}$ famille de modules différentiels.

(ii) $d_r: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$

(iii) $E_{r+1}^{p,q} \cong \ker d_r^{p,q} / \sum_m d_r^{p-r, q+m-1} = H^{p+q}(E_r^{p,q})$

2) Convergence des suites spectrales

on dit que $(E_r^{p,q})$ converge vers $H^*(C, d)$ (Complexes de chaînes) ssi $\exists$ une filtration décroissante

$(F^p(C))$ vérifiant $F^{p+1}(H^*(C)) \subset F^p(H^*(C))$ telle que

$$E_\infty^{p,q} = F^p(H^{p+q}(C)) / F^{p+1}(H^{p+q}(C))$$

Théorème de convergence

Si la filtration $F^\bullet$. Soit (C, d) un complexe de chaînes filtré i.e. $\exists (F^p(C))$ une filtration décroissante de C telle que $dF^p(C^k) \subset F^p(C^{k+1})$

Si $(F^p(C))$ bornée i.e. $\forall k, \exists p_k < q_k$

• $F^{p_k}(C^k) = C^k$ (la filtration commence par C^k)

• $F^{q_k}(C^k) = 0$

Alors $\exists (E_r^{p,q})$ une suite spectrale qui converge vers $H^*(C, d)$ où $E_0^{p,q} = F^p(C^{p+q}) / F^{p+1}(C^{p+q})$

$$d_0^{p,q}: E_0^{p,q} \rightarrow E_0^{p, q+1}$$

$$E_1^{p+q} = H^{p+q}(E_0^{p,q}) = \ker d_0^{p,q} / \sum_m d_0^{p-r, q+m-1}$$

$$0 \rightarrow F^{p+1}(C^{p+q}) \rightarrow F^p(C^{p+q}) \xrightarrow{d_0} E_0^{p,q} \rightarrow 0$$

$$\downarrow d_0 \quad \downarrow d_0 \quad \downarrow d_0$$

$$0 \rightarrow F^{p+1}(C^{p+q+1}) \rightarrow F^p(C^{p+q+1}) \rightarrow E_0^{p, q+1}$$

3) Suite spectrale impaire

Donné

- $(\Lambda V, d)$ module minimal elliptique
- $V = P \oplus Q$ $P = V^{\text{pair}}$, $Q = V^{\text{impair}}$

$$\Lambda^p V = \left\{ \sum a_{i_1 \dots i_p} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p} \mid a_{i_1 \dots i_p} \in k, v_{i_j} \in W \right\}$$

$$\cdot [\Lambda W]^p = \{ w \in \Lambda W ; |w| = p \} \quad , \quad |w| = \text{degré de } w$$

$$\cdot d = d_0 + d_1 \text{ où } \begin{cases} (d - d_0)(w) \in \Lambda^p P \oplus \Lambda^{p+1} Q \\ d_0 w \in \Lambda^p P, \forall w \in V \end{cases}$$

nécessairement si $w \in P$, $d_0 w = 0$

car $d_0 w \in \Lambda^p P$ et $|d_0 w|$ impair $\Rightarrow d_0 w = 0$

D'où $(\Lambda V, d_0)$ appelé module pur associé à $(\Lambda V, d)$

$$w \in V \Rightarrow d_0 w \in \Lambda^1 V = k[P] \oplus \Lambda^1 Q$$

$$\Lambda^p V = \left\{ \sum p_{i_1 \dots i_p} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p} \right\}$$

$$p_{i_1 \dots i_p} \in k[P], v_{i_j} \in Q$$

Soit $\beta = \{x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q\}$ où $P = k\{x_1, \dots, x_p\}$

$$Q = k\{y_1, \dots, y_q\}$$

$$\Lambda^p V = \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq p+q} p_{i_1 \dots i_p}(x_1, \dots, x_p) y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_p} \right\}$$

$$= \bigoplus k[P] \otimes \Lambda^k Q$$

$$\Lambda^k Q = k\{y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq q\}$$

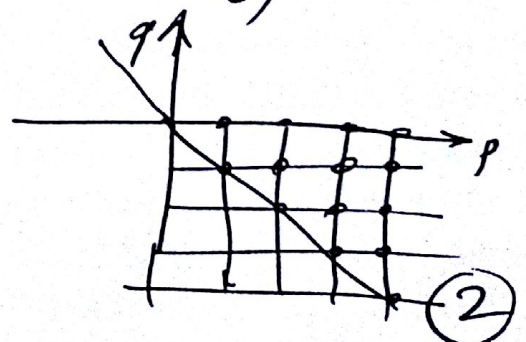
$$\dim \Lambda^k Q = C_q^k$$

Filtration de $(\Lambda Q, d)$

On définit par $r \leq 0$; $C^{p,q} = (\Lambda^p P \otimes \Lambda^{-q} Q)^{p+q}$

Remarque

$$\begin{cases} C^{p,q} = 0 & \forall q > 0 \\ C^{p,q} = 0 & \forall p < 0 \\ C^{p,q} = 0 & \forall p < -q \end{cases}$$



$$F^p(\Lambda V) = \bigoplus_{k \geq p} C^{k,*}$$

$$= \bigoplus_j \bigoplus_{k \geq p} C^{k,j}$$

$$= \bigoplus_{k \geq p} \bigoplus_{-k \leq j \leq 0} (1P \otimes 1^{-j})^{k+j}$$

propriété

$$\cdot C^{p,q} \cdot C^{p',q'} \subset C^{p+p',q+q'}$$

$$\cdot d_0 C^{p,q} = d_0 (1P \otimes 1^{-q} Q)^{p+q} \\ \in (1P \otimes 1^{-(q+1)})^{p+q+1} = C^{p,q+1}$$

$$d_0(F^p) \subset F^p$$

$\Rightarrow (\Lambda V, d)$ est un complexe filtré et $E_0 = (\Lambda V, d_0)$
et bornée

$\Rightarrow (E_r^{p,q})$ converge vers $H^*(\Lambda V, d)$

Il est facile de montrer que $d_1 = 0$ car $d_0: F^p \rightarrow F^{p+2}$

$$E_1 = E_0$$

$$E_\infty = H(E_0) = k[P] / \langle d_0 y_1, \dots, d_0 y_q \rangle$$