

Le 05/12/2015, UIR

Cours de Hileli

Espaces elliptiques (suite) (2^{ème} partie)

Caractérisation arithmétique des espaces elliptiques

Problème. $\exists ?$ propriétés arithmétiques qui permettent de caractériser les espaces elliptiques (posé par Friedlander - Halperin)

Soit X un espace elliptique, $(1V, d)$ son modèle minimal. On pose

$$1V = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_p] \otimes \mathbb{Q}\{y_1, \dots, y_q\} \text{ où}$$

$$|x_i| = 2a_i, \quad 1 \leq i \leq p$$

$$|y_j| = 2b_j - 1$$

X support 1-cannone $\Rightarrow b_j \geq 2$

$$V_i \cong \text{Hom}(\pi_i(X), \mathbb{Q})$$

On pose $A = (a_1, \dots, a_p)$, $B = (b_1, \dots, b_q)$
a-exposants de X b-exposants de X

$\{a_1, \dots, a_p\}$ et $\{b_1, \dots, b_q\}$ sont bien définis

A correspond au $\pi_{\text{pair}}(X \otimes \mathbb{Q})$.

B " " $\pi_{\text{impair}}(X \otimes \mathbb{Q})$

Définition on dit que (B, A) vérifie la condition arithmétique (CA) si

$$\forall I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset [1, p] \quad i_1 < i_2 < \dots < i_r$$

$\exists J = \{j_1, \dots, j_r\} \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq q$ tel que on peut écrire $\forall k \in [1, r]$, $b_{j_k} = \sum_{l=1}^r \delta_l^k a_{i_l}$ avec $\delta_l^k \in \mathbb{N}$

Si de plus $\sum_{l=1}^r \delta_l^k \geq 2$ on dit que (B, A) vérifie la condition arithmétique forte (CAF).

$(1V, d_{-1})$ le modèle par associé à $1V$.

$$d = d_{-1} + d_0 + \dots + d_n + \dots \quad \text{ou } d_n x_i \in 1P \otimes 1^n Q$$

$$d_n y_i \in 1P \otimes 1^{n+1} Q$$

$$\text{ou } P = \{x_1, \dots, x_p\}, Q = \{y_1, \dots, y_q\}$$

pour $n = -1$ on pose $1^{-1} Q = 0, 1^0 Q = Q$, d'où

$$d_{-1} x_i = 0 \text{ et } d_{-1} y_i \in 1P$$

$$d_{-1}^2 = 0 \text{ car } d_{-1}(d_{-1} x_i) = 0$$

$$d_{-1}(d_{-1} y_j) = d_{-1}(P_j) = 0 \quad (d_{-1} y_j = P_j)$$

$$\text{Car } P_j \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_p]$$

Proposition. $(1V, d)$ elliptiquessi $(1V, d_{-1})$ elliptique

En effet à partir de la décomposition de

$$d = d_{-1} + d_0 + \dots + d_n + \dots$$

on peut construire une suite spectrale (E_r)

où $E_2 = H(1V, d_{-1})$ qui converge vers $H(1V, d)$.

$$\text{qui est } d_{-1} y_j = P_j = \sum_{i=1}^q \alpha_{ij} x_i^{n_i}, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$$

$$|d_{-1} y_j| = 2b_j$$

Théorème. (B, A) une paire de suite d'entiers
ou a équivalence

(i) (B, A) vérifie (CAF)

(ii) $\exists X$ espace elliptique qui B, A un h -exposant
et a -exposant

en plus si $\forall j, b_j \geq 2$ on peut choisir X variété
compacte 1-connexe.

Lemme. Si on choisit $|a_1| \geq |a_2| \geq \dots \geq |a_p|$

$$|b_1| \geq |b_2| \geq \dots \geq |b_q|$$

on a

$$(i) q \geq p$$

$$(ii) \forall i \in [1, p], b_i \geq 2a_i$$

En effet Soit $i_k = k$ $1 \leq k \leq p$ ($i = p$)
 pour $\{1, \dots, p\}$ $\exists 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq q$,

$$h_{j_k} = \sum_{\ell=1}^p \sigma_{\ell}^k a_{\ell} \Rightarrow q \geq p$$

donc il y a au moins p h_j .

(ii) Soit $I_i = \{1, \dots, i\}$

$$\exists 1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq q : h_{j_k} = \sum_{\ell=1}^i \sigma_{\ell}^k a_{\ell} \geq 2a_i$$

$$(\geq \sum_{\ell=1}^i \sigma_{\ell}^k) a_i$$

$$\exists j_k \quad h_i \geq h_{j_k} \Rightarrow h_i \geq 2a_i$$

proposition (Halperin)

$$fd(X) = \sum_{j=1}^q (2h_j - 1) - \sum_{i=1}^p (2a_i - 1)$$

$$\text{equiv} \quad \left. \begin{aligned} fd(X) &= fd(\wedge V, d) \\ &= fd(\wedge V, d_{-1}) \end{aligned} \right\} \text{ suite spectrale}$$

$$\wedge V = \wedge P \otimes \wedge Q$$

Soit $k : x_i^k = dw_i$

$$R = \{w_1, \dots, w_p\}$$

$$(\wedge V \otimes \wedge R, D) \xrightarrow{\pi_i} (\wedge P / (dw_i) \otimes \wedge Q, d)$$

Corollaire. $fd(X) \geq \dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$

$$2fd(X) - 1 \geq \sum (2h_j - 1)$$

$$fd(X) \geq \sum_{i=1}^p 2a_i$$

$$\chi(t) = \sum_{n \geq 0} \dim H^n(X) t^n, \quad \chi(1) = \frac{\prod h_j}{\prod a_i} = \text{somme des nombres de Betti.}$$