la cocatégorie rationnelle de l'espace classifiant des classes d'homotopies des self-équivalences

BADR BEN EL KRAFI

Faculté des sciences AIN CHOK

UIR .RABAT 07/03/2015

PLAN

- Algèbre de LIE graduée différentielle de dérivations

PLAN

- Algèbre de LIE graduée différentielle de dérivations
- Fibre bundles et principal bundles

PLAN

- Algèbre de LIE graduée différentielle de dérivations
- Fibre bundles et principal bundles
- L'espace classifiant

PLAN

- Algèbre de LIE graduée différentielle de dérivations
- Fibre bundles et principal bundles
- L'espace classifiant
- Cochaînes sur l'algèbre de LIE graduée différentielle de dérivations

PLAN

- Algèbre de LIE graduée différentielle de dérivations
- Fibre bundles et principal bundles
- L'espace classifiant
- Cochaînes sur l'algèbre de LIE graduée différentielle de dérivations
- Homotopie rationnelle des selfs-equivalences

Définition de dérivation des ag

Definition

Une dérivation d'algèbre de degré $p \in \mathbb{Z}$,est une application linéaire $\theta \in Hom_p(A, A)$
telle que: pour tout couple (a, b) d'éléments homogènes de A

$$\theta(ab) = \theta(a)b + (-1)^{p|a|}a\theta(b)$$

$Der_p(A)$ est l'espace vectoriel des dérivations de degré p de l'algèbre A
On pose:

$$Der(A) = \bigoplus_p Der_p(A)$$

Définition de dérivation des alg

Definition

Une dérivation d'algèbre de LIE de degré $p \in \mathbb{Z}$,est une application linéaire $\theta \in Hom_p(L, L)$ telle que: pour tout couple (a, b) d'éléments homogènes de L

$$\theta([a, b]) = [\theta(a), b] + (-1)^{p|a|} [a, \theta(b)]$$

$Der_p(L)$ est l'espace vectoriel des dérivations d'algèbre de LIE de degré p
On pose:

$$Der(L) = \bigoplus_p Der_p(L)$$

L'algèbre de LIE différentielle de Der(A)

Soit (A, ∂) un adg
Posons: Pour $\theta_1$et $\theta_2 \in Der(A)$

$$[\theta_1, \theta_2] = \theta_1 \circ \theta_2 - (-1)^{|\theta_1||\theta_2|}\theta_2 \circ \theta_1$$

$$\begin{aligned} d : Der_p(A) &\longrightarrow Der_{p-1}(A) \\ \theta \quad &\longrightarrow d\theta = [\partial, \theta] \end{aligned}$$

Théorème

Theorem

Le triplet $(Der(A), [,] , d)$ *est une algèbre de LIE graduée différentielle*

Definition

The map $p : E \longrightarrow B$ is a locally trivial fibration, or fiber bundle, with fiber F if it satisfies the following propertie:For every point $x \in B$ there is an open neighborhood $U_x \subset B$ and a fiber preserving homeomorphism

$$\Psi_x : p^{-1}(U_x) \overset{\simeq}{\longrightarrow} U_x \times F$$

that is a homeomorphism making the following diagram commute:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_x) & \overset{\simeq}{\longrightarrow} & U_x \times F \\ p \downarrow & & \downarrow \pi \\ U_x & & U_x \end{array}$$

Exemples

Examples

1/ The projection map $X \times F \rightarrow X$ is the trivial fibration over X with fiber F.
2/ Let S^1 be the unit circle . Consider the map $f_n : S^1 \rightarrow S^1$ given by $f_n(z) = z^n$. Then $f_n : S^1 \rightarrow S^1$ is a locally trivial fibration with fiber a set of n distinct points (the nth roots of unity in S^1).
3/ Let $exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$be given by Then exp is a locally trivial fibration with fiber the integers $\mathbb{Z}$.

Exemples

Examples

4/ Recall that the n - dimensional real projective space $\mathbb{R}P^n$ is defined by:

$$\mathbb{R}P^n = S^n / \sim \ \ where\ x \sim -x,\ \ for\ x \in S^n$$

Let p : $S^n \to \mathbb{R}P^n$ be the projection map. This is a locally trivial fibration with fiber the two point set.

5/ Here is the complex analogue of the last example. Let S^{2n+1} be the unit sphere in $\mathbb{C}^{n+1}$

$$\mathbb{C}P^n = S^{2n+1} / \sim$$

where $x \sim ux$, where $x \in S^{2n+1}$, and $u \in S^1$. Then the projection p : $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ is a locally trivial fibration with fiber S^1

Definition

Let G be a topological group. A principal G- bundle is a fiber bundle $p: E \longrightarrow B$ with fiber $F = G$ satisfying the following properties.
(1) The total space E has a free, fiberwise right G action. That is, it has a free group action making the following diagram commute:

$$\begin{array}{ccc} E \times G & \stackrel{g}{\longrightarrow} & E \\ {}_{p\times 1}\downarrow & & \downarrow p \\ B \times \{1\} & & B \end{array}$$

Définition et exemples de principal bundles

Definition

(2) The induced action on fibers

$$g : p^{-1}(x) \times G \longrightarrow p^{-1}(x)$$

is free and transitive.
(3) There exist local trivializations

$$\Psi_x : p^{-1}(U_x) \xrightarrow{\simeq} U_x \times G$$

that are equivariant. That is, the following diagrams commute:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_x) \times G & \underset{\approx}{\xrightarrow{\Psi_x \times id}} & U_x \times G \times G \\ g \downarrow & & \downarrow id \times * \\ p^{-1}(U_x) & \underset{\approx}{\xrightarrow{\Psi_x}} & U_x \times G \end{array}$$

L'espace classifiant

Definition

Soit G un groupe topologique
Posons: $E_G = \bigcup_n G^{*n}$ avec $G^{*n} = \{((g_0, t_0), ..., (g_n, t_n)) / \sum t_i = 1\}$
L'espace classifiant de G est:

$$B_G = E_G / G$$

Conséquances:1/ $p_G : E_G \longrightarrow B_G$ est un $G-$ *bundle*
2/ $\pi_*(E_G) = 0$

Cochaînes d'une ldg de type fini

Definition

Soit (L, ∂) une algèbre de LIE différentielle graduée

$$C^*(L, \partial) = (\Lambda s^{-1} \sharp L \ , \ d = d_1 + d_2)$$

$$< d_1 s^{-1} z; sx > \quad = - < z; \partial x > \quad \forall z \in \sharp L, x \in L$$

$$< d_2 s^{-1} z; sx_1 \Lambda sx_2 > \quad = (-1)^{|x_1|} < z; [x_1, x_2] > \ \forall z \in \sharp L, x_i \in L$$

Théorème

Theorem

C^* est un isomorphisme entre $ADGC_{lq}$ et la sous-catégorie pleine de LDG formée des algèbres de LIE de type fini.

Si X est un CW-complexe de modéle minimal $(\Lambda V; d)$; alors l'algèbre $C^*(Der(\Lambda V); [,]; d))$ des cochaines sur l'algèbre de Lie des dérivations de $(\Lambda V; d)$,est un modéle de Sullivan de l'espace classifiant du monoÏde $autX$.

Considérons pour cela l'algèbre de Lie différentielle graduée des dérivations $(Der(M_X);[;];d)$
Notons $Der\#(M_X)$ l'algèbre de Lie différentielle graduée définie par:

$$Der\#_i(\Lambda V;d) = Der_i(\Lambda V;d) \ si \quad i \neq 0$$

$Der\#_0(\Lambda V;d)$ désigne le sous-espace vectoriel rationnel de $Der_0 M$ constitué des dérivations θ vérifiant $\theta(V) \subset \Lambda^{\geq 2} V$

Theorem

Il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $L(\epsilon_\#(M_X)) = H_0(Der\#(M_X;d))$ où $L(\epsilon_\#(M_X))$ désigne l'algèbre de Lie associée a $\epsilon_\#(M_X)$ par la corespondance de Mal'cev