Rappel.

Fibré de Hurewicz

Propriété de relèvement des homotopies

$$\begin{tikzcd} A\times\{0\} \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ A\times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde F"] & B \end{tikzcd}$$

fibration

$F$ homotopie entre $F\circ i = F(\cdot,0) = p\circ\tilde f = f$ et $F(\cdot,1)$

$\tilde f$ relèvement de $f: x\mapsto F(x,0)$

$$\exists \tilde F \mid \begin{cases} \tilde F\circ i = \tilde f = \tilde F(\cdot,0) \\ p\circ\tilde F = F \end{cases}$$

Fibré de Serre $p: E\to B$ fibration de Serre si elle admet la "propriété de relèvement des homotopies" pour les $A$ CW-complexes ce qui revient à dire

$$\begin{tikzcd} e^n\times\{0\} \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ e^n\times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists\tilde F"] & B \end{tikzcd}$$

$e^n=\{x\in\mathbb{R}^n ;\ \|x\|\leq 1\}$ cellule de dimension

Remarque :

* Fibration de Hurewicz $\Rightarrow$ Fibration de Serre
* Fibration de Serre $\cancel{\Rightarrow}$ est une fibration de Hurewicz

Exemples (Fibré de Hurewicz)

ⓐ $p: E \longrightarrow *$

$x \longmapsto * = b_0$

$$\begin{tikzcd} A\times\{0\} \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ A\times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, "\tilde F"] & B=\{b_0\} \end{tikzcd}$$

$\tilde F(x,t)=\tilde f(x,0)$ cte

$F\circ i = \tilde f$ et $p\circ\tilde F = F = c_{b_0}$

② $p: B\times F \longrightarrow B$ fibration (la plus simple)

$(b,y) \longmapsto b$

$$\begin{tikzcd} A\times\{0\} \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d, hook, "i"'] & B\times F \arrow[d] \\ A\times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde F"] & B \end{tikzcd}$$

$\tilde f(x,0)=(b,\tilde f_1(x))$

$(p\circ\tilde f)(x,0) = b = F(x,0)$

$\tilde f(x,0)=(F(x,0),\tilde f_1(x))$

$\tilde{F}(x,t) = (F(x,t), \hat{f}_1(x))$

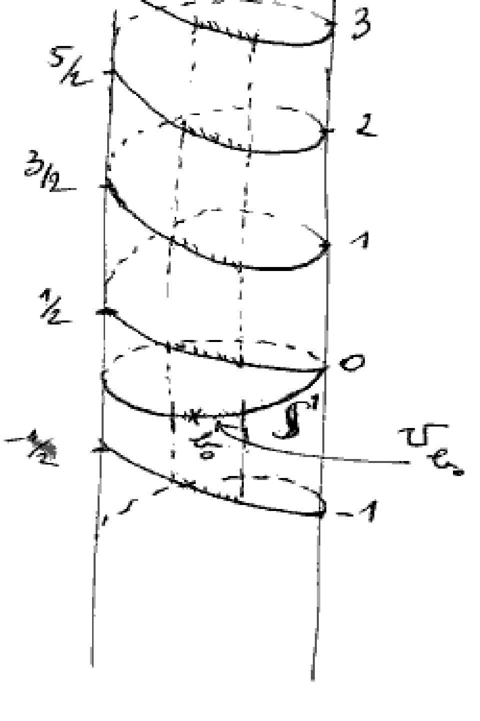
$\tilde{F}(x,0) = (\tilde{F}\circ i)(x,0) = (F(x,0), \hat{f}_1(x)) = \hat{f}(x,0)$

$p\circ\tilde{F}(x,t) = p(F(x,t), \hat{f}_1(x)) = F(x,t)$

$p$ ~~[illegible]~~ est une fibration de fibre et la fibre

$p^{-1}(b_0) = \{b_0\}\times F$

(3) <u>Revêtement</u> Exemple de revêtement non trivial




$q : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$
$t \longmapsto e^{2i\pi t}$

$p^{-1}\{b_0\} = \{ e^{2i\pi(t_0+n)} \,;\, e^{2i\pi t_0} = b_0 \}$
$\cong \mathbb{Z}$

<u>Définition</u>. $p : E \longrightarrow B$ est dit un revêtement si
$\exists F$ fibre type espace discret
$\forall b \in B \,;\, \exists U_b \in \mathcal{V}_b$
(Voisinage distingué en $b$)
$\exists\, \Phi_b : p^{-1}(U_b) \xrightarrow[\text{homéom}]{\cong} U_b \times F$

$$(*)\quad \begin{tikzcd} p^{-1}(U_b) \arrow[rr, "\Phi_b"] \arrow[dr] & & U_b \times F \arrow[dl, "p_1"] \\ & U_b & \end{tikzcd}$$

$\Phi_b(x) = (p(x), \varphi_b(x))$
$\varphi_b : p^{-1}(U) \longrightarrow F$

$p : E \longrightarrow B$ revêtement si $\forall b \in B, \exists U_b \in \mathcal{V}_b$ ;
$p^{-1}(U_b) = \bigcup_{i\in F} V_i$ où $\begin{cases} V_i \cap V_j = \emptyset & i \neq j \\ p_{|V_i} : V_i \xrightarrow[\text{homéom}]{\cong} U_b \end{cases}$
$(V_i = \Phi_b^{-1}(U_b \times \{i\}))$

<u>Remarque</u>. Si $F$ est muni d'une topologie non discrète $(E, p, B, F)$ est dit un fibré localement trivial si $(*)$ est vérifiée. (En anglais, "fibre bundle"

<u>Problème</u>. Un revêtement est-il une fibration? Cas de fibre?

* Si $F$ est un groupe $(F = G)$ $(E, p, B, G)$ est dit un $G$ bundle

<u>Proposition</u> Tout revêtement est une fibration.