Compléxité topologique relative à une topologie τ sur PX

Séminaire de topologie algébrique CRMEF Rabat

Y. Derfoufi

CRMEF OUJDA

03 Janvier 2015

Introduction

L'objectif principal de ce travail est de généraliser la notion de compléxité topologique définie par M. Farber[1] en remplaçant la topologie compacte ouverte par une quelconque topologie τ sur PX. Le TC obtenue sera noté TC^{τ}, on verra ensuite des exemples de topologies pour lesquelles TC^{τ} devient un invariant homotopique, on montre aussi que cette nouvelle approche nous permet d'étendre la notion d'algorithme de planification de mouvement aux espaces non contractiles.

Algorithme de planification de mouvement

Dans tout ce paragraphe X designe un espace topologique connexe par arc, et $PX = \{\gamma : [0,1] \longrightarrow X\}$ l'espace des chemins continues sur X. On définit l'application $\pi : PX \longrightarrow X \times X$ par $\gamma \longrightarrow (\gamma(0), \gamma(1))$. (PX est équipé de la topologie **compacte ouverte**)

Definition

Un algorithme de planification de mouvement est une application continue $s : X \times X \longrightarrow PX$ verifiant : $\pi \circ s = Id_{X \times X}$ c.a.d $\begin{cases} s(A,B)(0) = A \\ s(A,B)(1) = B \end{cases}$

Theorem

Un algorithme de planification de mouvement $s : X \times X \longrightarrow PX$ existe si et seulement si X est contractil

Algorithme de planification de mouvement

Proof.

$\Longrightarrow$) supposons qu'il existe une section continue $s : X \times X \longrightarrow PX$ verifiant : $\pi \circ s = Id_{X \times X}$ et fixons un point $A_0 \in X$ considerons ensuite l'homotopie : $H(A,t) = s(A_0, A)(t)$ on a évidemment $H(A,0) = A_0$ et $H(A,1) = A$ ce qui montre que H est une contraction de X dans $\{A_0\}$
$\Longleftarrow$) Supposons qu'il existe $A_0 \in X$ et une contraction H de X dans $\{A_0\}$ considerons la section $s : X \times X \longrightarrow PX$ definie par :

$$\begin{cases} s(A,B)(t) = H(A, 1-2t) & \text{pour } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ s(A,B)(t) = H(B, 2t-1) & \text{pour } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \quad \text{on a bien}$$

$\pi \circ s(A,B) = (A,B)$ *cqfd* □

Compléxité topologique selon M. Farber

Soit X un espace topologique et $PX = \{\gamma : [0,1] \longrightarrow X\}$ l'espace des chemins continues de X. On définit la projection $\pi : PX \longrightarrow X \times X$ par $\gamma \longrightarrow (\gamma(0), \gamma(1))$. (PX est équipé de la **topologie Compacte Ouverte** (ie **compact open topology**)

Definition

La complexité topologique de X est le plus petit entier k pour lequel Il existe un recouvrement Ouvert $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ de $X \times X$ tel que :
Pour tout $i \in \{1, ..., k\}$ il existe une **locale section** $s_i : U_i \longrightarrow PX$ (ie application continue $s_i : s_i : U_i \longrightarrow PX$ telle que $\pi \circ s_i(x) = x \quad \forall x \in U_i$)
On écrit alors $TC(X) = k$ (S'il n'existe aucun entier k verifiant les conditions ci-dessus on pose $TC(X) = \infty$)

proposition

$(TC(X) = 1) \Longleftrightarrow X$ est contractil

Compléxité topologique selon M. Farber

Example

Si $X = \{x_0\}$ alors $TC(X) = 1$

Example

Si C est une partie convexe d'un **evn** alors $TC(C) = 1$, en particulier pour toute boule **B** d'un evn **E** on a $TC(B) = 1$

Example

$TC(S^1) = 2$

Lemma

Si G est un groupe topologique alors $TC(G) = cat(G)$

Complexité topologique associée à une topologie sur PX

On munit cette fois ci PX d'une autre topologie τ autre que la topologie compacte ouverte et le TC qu'on obtient sera noté TC^{τ}.
On définit un algorithme de planification de mouvement sur $X \times X$ relativement à la topologie τ comme étant une application continue $s : X \times X \to (PX, \tau)$ vérifiant : $\pi \circ s = Id_{X \times X}$. D'après les travaux de M.Farber $[1]$, un tel algorithme existe si et seulement si X est contractile, mais ici la réciproque est inexacte, ce qui permet d'étendre les algorithmes de planification de mouvement sur des espaces non contractils.

Complexité topologique associée à une topologie sur PX

notation

La topologie compacte ouverte sera notée τ_{CO}

Definition

La complexité topologique de X relativement à la topologie τ définie sur PX est le plus petit entier k pour lequel Il existe un recouvrement Ouvert $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ de $X \times X$ tel que :
Pour tout $i \in \{1, ..., k\}$ il existe une **locale section** $s_i : U_i \longrightarrow PX$ (ie application continue s_i : $s_i : U_i \longrightarrow (PX\ , \tau)$ telle que $\pi \circ s_i(x) = x$ $\forall x \in U_i$)
On écrit alors $TC^{\tau}(X) = k$ (S'il n'existe aucun entier k verifiant les conditions ci-dessus on pose $TC^{\tau}(X) = \infty$)

Complexité topologique associée à une topologie sur PX

proposition

Si $\tau_1 \prec \tau_2$ alors $TC^{\tau_1}(X) < TC^{\tau_2}(X)$

proposition

Si X est un espace munit d'une topologie τ moin fine que τ_{CO} et si de plus X est contractil alors il existe au moin un algorithme de planification de mouvement $s : X \times X \to X$ (la réciproque est fausse en générale)

Cas d'une topologie moin fine que la topologie compacte ouverte

Corollary

Pour toute topologie τ moin fine que τ_{CO} on a : (X contractil $\Longrightarrow TC^{\tau}(X) = 1$)
La réciproque est fausse en générale

proposition

Si G est un groupe topologique et τ une topologie moin fine que τ_{CO} alors $TC^{\tau}(G) \leq cat(G)$

Proof.

Il suffit de remarquer que $TC^{\tau}(G) \leq TC(G)$ et que $TC(G) = cat(G)$
cqfd □

Compléxité topologique associée à la topologie de la convergence simple.

remarque

La topologie de la convergence simple τ_S sur PX est la moin fine rendant continue les $\widetilde{t} : PX \to X \ \gamma \longmapsto \gamma(t)$

Theorem

Dans le cas de la topologie de la convergence simple τ_S, TC^{τ_S} est un invariant homotopique.

Lemma

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue, alors l'application $\varphi : PX \to PY \ \gamma \longmapsto f \circ \gamma$ est continue pour la topologie de la convergence simple.

Compléxité topologique associée à la topologie de la convergence simple.

Proof.

(du Lemme) Soit $\gamma_0 \in PX$ et soit $W = W(f \circ \gamma_0, t_0, V_{f\circ\gamma_0(t_0)}) = \{\alpha \in PY / \alpha(t_0) \in V_{f\circ\gamma_0(t_0)}\}$ un voisinage élémentaire de $\varphi(\gamma_0)$ dans PY. On vérifie facilement que $\varphi^{-1}[W(f \circ \gamma_0, t_0, V_{f\circ\gamma_0(t_0)})] = W(\gamma_0, t_0, f^{-1}(V_{\gamma_0(t_0)})$ qui est bien un voisinage élémentaire de γ_0 dans PX. $\square$

Proof.

(Preuve du thérème) $\Longrightarrow$) Supposons qu'il existe $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ deux applications continues telles que $f \circ g$ soit homotope à Id_Y. Soit donc $h_t : Y \longrightarrow Y$ une homotopie telle que : $\begin{cases} h_0 = Id_Y \\ h_1 = f \circ g \end{cases}$ et soit $k = TC^{\tau_s}(X)$, il existe donc $U_1, \ldots U_k$ des ouverts de $X \times X$ et des sections continues $s_i : U_i \longrightarrow (PX, \tau_s)$ telles que : $\pi \circ s_i = Id_{U_i}$ et $\underset{1 \leq i \leq k}{\cup U_i} = X \times X$

Pour chaque $i \leq k$ on pose $V_i = (g \times g)^{-1}(U_i)$, $V_1, \ldots, V_k$ constitut évidemment un recouvement ouvert de $Y \times Y$ $\square$

Proof.

(Preuve du thérème) on définit ensuite pour chaque $i \leq k$ la section $\alpha_i : V_i \longrightarrow PY$ par :

$$\alpha_i(A,B)(t) \begin{cases} h_{3t}(A) \text{ pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ f[s_i(g(A),g(B))(3t-1)] \text{ pour } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ h_{3(1-t)}(B) \text{ pour } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases} \text{ on a}$$

evidemment $\alpha_i(A,B)(0) = A$ et $\alpha_i(A,B)(1) = B$ Il reste maintenant à prouver que les α_i sont continue, soit alors $(A_0, B_0) \in V_i \subset Y \times Y$ et $W = W(\alpha_i(A_0,B_0), t_1, t_2, \ldots, t_k, V_{\alpha_i(A_0,B_0)(t_1)}, \cdots, V_{\alpha_i(A_0,B_0)(t_k)}) = \{\gamma \in PY / \gamma(t_j) \in V_{\alpha_i(A_0,B_0)(t_j)} \text{ pour } 1 \leq j \leq k\}$ un voisinage élémentaire de $\alpha_i(A_0,B_0)$ dans PY pour la topologie de la convergence simple. $\square$

Proof.

(Preuve du thérème) Montrons maintenant que $\alpha_i^{-1}(W)$ est un voisinage de (A_0, B_0) dans $V_i \subset Y \times Y$, il suffit de prouver le résultat pour un voisinage de la forme : $W = W(\alpha_i(A_0, B_0), t_0, V_{\alpha_i(A_0,B_0)(t_0)})$.
1^{er} Cas : $t_0 \in [0, \frac{1}{3}]$ $W = \{\gamma \in PY / \gamma(t_0) \in V_{h_{3t_0}(A)}\}$
$\alpha_i^{-1}(W) = \{(A, B) \in V_i / h_{3t_0}(A) \in V_{h_{3t_0}(A_0)}\} =$
$\{(A, B) / h_{3t_0} \circ P_1(A, B) \in V_{h_{3t_0} \circ P_1(A_0,B_0)}$ (où P_1 est la projection $Y \times Y \longrightarrow Y$ $(A, B) \longmapsto A$). On a donc
$\alpha_i^{-1}(W) = (h_{3t_0} \circ P_1)^{-1}(V_{h_{3t_0} \circ P_1(A_0,B_0)})$ qui est bien un voisinage de (A_0, B_0) puisque $h_{3t_0} \circ P_1$ est continue.

$\square$

Proof.

(Preuve du thérème)
$2^{ème}$ Cas $t_0 \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ $W = \{\gamma \in PY / \gamma(t_0) \in V_{[f \circ s_i(g(A_0), g(B_0))](3t_0 - 1)}\}$ et $\alpha_i^{-1}(W) = \{(A, B) \in V_i / [f \circ s_i(g(A), g(B))](3t_0 - 1) \in V_{[f \circ s_i(g(A_0), g(B_0))](3t_0 - 1)}\}$ et en vertu du lemme précedent l'application $(A, B) \longmapsto f \circ s_i(g(A), g(B))$ est continue et en tenant compte de la remarque précédente l'application
$\xi : (A, B) \longmapsto [f \circ s_i(g(A), g(B))](3t_0 - 1)$ est continue et par suite $\alpha_i^{-1}(W) = \xi^{-1}(V_{\xi(A_0, B_0)})$ est un voisinage de (A_0, B_0)

$\square$

Proof.

(Preuve du thérème)
$3^{ème}$ Cas : $t_0 \in]\frac{2}{3}, 1]$ se traite de la même manière que le premier cas en considérant la projection $P_2 : Y \times Y \to Y \quad (A, B) \longmapsto B)$ et par suite les applications $\alpha_i : V_i \longrightarrow PY$ sont continue, ce qui entraine $TC^{\tau_s}(Y) \leq k = TC^{\tau_s}(X)$ et de la même manière on montre que $TC^{\tau_s}(Y) \geq TC^{\tau_s}(X)$ *cqfd* □

Comparaison de TC (convergence simple) avec LS category

On rappelle que la topologie de la convergence simple est la moin fine qui rend continues les $\widetilde{t} : PX \to X \ \ \gamma \longmapsto \widetilde{t}(\gamma) = \gamma(t)$. Et comme la topologie compacte ouverte rend continues les applications d'évaluations $e : PX \times I \to X \ (\gamma, t) \longmapsto e(\gamma, t) = \gamma(t)$. On deduit que la topologie de la convergence simple τ_S est moin fine que celle compacte ouverte τ_{CO}, ce qui conduit au résultat suivant:

Proposition

$TC^{\tau_S}(X) \leq TC(X) \leq 2cat(X) - 1.$

Comparaison de TC (convergence simple) avec LS category

Corollary

Si X est paracompact et connexe par arc alors
$TC^{\tau_s}(X) \leq TC(X) \leq 2\dim X + 1$

Theorem

Si G est un groupe topologique alors $TC^{\tau_s}(G) \leq cat(G)$

Problèmes soulevés

Problem

Peut on comparer $TC^{\tau_S}(X)$ à $cat(X)$. A quelle condition a -t- on l'égalité ? (cas des groupes topologiques)

Problem

Sous quelles conditions pour une topologie τ, TC^{τ} est il un invariant homotopique ?

Bibliographie

[1]. Michael Farber, Topological Complexity of Motion Planning, Discrete Comput Geom 29:211–221 (2003), Springer Verlag New York Inc
[2]. I. M. JAMES, On category, in the sense of Lusternik-Schnirelman, , Topology. Vol. 17. pp. 331-343 Press Ltd.. 1978.
[3]. Michael Farber, Invitation to topological robotics, Zurich Lecturs in Advenced Mathematics, European Mathematical Society.
[4]. MICHAEL FARBER AND MARK GRANT, Topological complexity of configuration spaces, arXiv:0806.4111V1 25 Jun 2008
[5]. Gregory Lupton and Jérôme Scherer, Topological Complexity of H - Space, Mathematics Subject Classi cation 2010
[6]. IBAI BASABE, JES´ US GONZ´ ALEZ, YULI B. RUDYAK, AND DAI TAMAKI, Higher topological complexity of configuration spaces on sphere. arXiv:1009.1851v4[math.AT] 8 Apr 2011
[7] Amin Saif and Adem Kılıçman. On classifying Hurewicz fibration and free Bundles over Polyhedron bases. Institute of Mathematical Rsearch (INSPEM), arXive:1008.3959v1 [math.AT] 24 Aug 2010

Bibliographie

[8] Yuli B. Rudyac. On Higher Analogs of Topological Complexity. arcXiv:0909.1616v3 [math.AT]

[9] Mark Grant, Gregory Lupton and John Opera, Space of Topoloical complexity One. arXiv:1207.4725v1 [math.AT] 19 Jul 2012

[10] Laurent Schwartz, Topologie générale et analyse fonctionnelle .Enseignement Des Sciences. Hermann

[11] N.Bourbaki, éléments de mathématiques, Topologie générale chapitre de 1 à 4. Hermann

[12] N.Bourbaki, éléments de mathématiques, Topologie générale chapitre de 5 à 10. Hermann

[13] N.Bourbaki, éléments de mathématiques, Espace vectoriels topologiques chapitre de 1 à 5. Masson

[14] Walter Rudin, Functional Anlysis. Lybrary of congress

[15] James Dugundji, Topology. Universal Book Stall, 1989