Plan de l'exposé

1. Présentation du problème.
2. Rappel sur la Conjecture du rang torique.
3. Complexe de Koszul.
4. Modèl minimal "Additif".
5. Factorisation.
6. Application à l'action du tore

(1) ⇒ (2)

Rappels

* Un groupe de Lie est un ensemble G qui à la fois une variété différentielle et un groupe pour lequel la multiplication $(g, g') \longmapsto gg'$ et l'inverse $g \longmapsto g^{-1}$ sont C^∞. La dimension d'un groupe de Lie est sa dimension comme variété.

Exemples

* Le tore $T^n = (S^1)^n$ est un exemple classique des groupe de Lie.
* Le groupe orthogonal $O(n)$
$${}^tAA = I_n$$
est un groupe de Lie.
* Les seules sphères qui sont des groupes de Lie sont S^0, S^1, et S^3.

Rappel sur la CRT

Definition et notations

Soit X un espace topologique, et G un groupe de Lie, une action continue φ de $G \times X \longrightarrow X$ vérifiant:

(a) $\varphi(e, x) = x$, $\forall x \in X$, e l'element neutre de G

(b) $\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$ $\forall x \in X$
$\forall (g, h) \in G \times G$

On définit le sous-groupe d'isotropie G_x en $x \in X$,

$$G_x = \{ g \in G / \varphi(g, x) = x \}$$

L'action φ de G sur X est dite presque libre ssi, pour tout $x \in X$ le sous groupe d'isotropie de x G_x est fini.

On définit alors le rang torique de X $rk_{\mathbb{Q}}(X)$ comme le maximum des $n \in \mathbb{N}$ tel que le tore T^n, de dimension n

$$T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$$ agit presque librement sur X.

② La fibration de Borel :

Soit X un espace topologique et G une action de G sur X. On associe à cette action une fibration de Borel :

$$(\mathcal{F}) : X \longrightarrow X_G \longrightarrow B_G$$

qui est définit comme le fibré de groupe structurel G et de la fibre X associé à la fibration universelle principale :

$$G \longrightarrow E_G \longrightarrow B_G.$$

③ La conjecture du rang faible :

CRT : Pour tout espace topologique X, simplement connexe et nilpotent on a $\dim H^*(X, \mathbb{R}) \geq 2^{rk_0(X)}$.

en terme du modèle minimal de Sullivan :

Propⁿ :

Si $(\Lambda(t_1, \dots, t_n) \otimes \Lambda V, d)$ est un d.g.c 1-connexe vérifiant $dt_i = 0$, $|t_i| = 2$ et $\dim(\Lambda(t_i) \otimes \Lambda V, d) < \infty$ alors

$$\dim H^*(\Lambda V, \bar{d}) \geq 2^n.$$

Cas où CRT est résolue :

La CRT est vraie dans les cas suivants :

① Les espaces homogènes.

② Les variétés Kählériennes

③ Si $rk_0(X) \leq 3$.

Présentation du complexe de Koszul :

Un complexe de chaîne M_* est une suite de R modules et de homomorphismes ∂_i :

$$M_* = \cdots \xrightarrow{\partial^M_{i+1}} M_i \xrightarrow{\partial^M_i} M_{i-1} \xrightarrow{\partial^M_{i-1}} \cdots$$

tel que $\partial^M_i \partial^M_{i+1} = 0 \quad \forall i \quad \mathrm{Im}\,\partial^M_{i+1} \subset \ker \partial^M_i$

Le $i^{ème}$ module d'homologie de M_* est

$$H_i(M_*) = \ker \partial^M_i / \mathrm{Im}\,\partial^M_{i+1} .$$

De la même manière on définie un complexe de cochaîne N^* sauf que cette fois on a :

$$N^* = \cdots \xrightarrow{\partial^{i-2}_N} N^{i-1} \xrightarrow{\partial^{i-1}_N} N^i \xrightarrow{\partial^i_N} N^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

Le $i^{ème}$ module de cohomologie de N^* est

$$H^i(N^*) = \ker \partial^i_N / \mathrm{Im}\,\partial^{i-1}_N .$$

C'est comme ça qu'elle est née l'idée du complexe de Koszul :

Si R est un anneau et $x \in R$, et M un R-module on considère le morphisme

- $x : M \longrightarrow M$
  $\quad\quad y \longmapsto xy$

On a $\ker(M \xrightarrow{\cdot x} M) = \{m \in M \mid xm = 0\} = (0 :_M x)$

Nous construisons le complexe de Koszul :

$$K_\bullet(x; M) \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot x} M \longrightarrow 0$$

On peut vérifier que :

$$H_0(K_\bullet(x; M)) \cong M/xM$$

$$H_1(K_\bullet(x; M)) \cong (0 :_M x)$$

Rq : $M \xrightarrow{\cdot x} M$ est injective ssi x est M-régulier c'est à dire qu'il n'est pas diviseur de zero dans M.

Nous allons par la suite généraliser cette notion pour des suites $x = x_1, \dots, x_n$ qui sont M-réguliers.

Construction du complexe : 1ère Méthode :

Soit $x_1, \dots, x_n \in R$. Posons $K_0 = R$ et $K_1 = R^n$, et soit $e_1, \dots, e_n \in K_1$ une base. Pour chaque $i \geq 2$ on pose :

$$K_i = \overset{i}{\wedge}(K_1) = \overset{i}{\wedge}(R^n)$$ qui est un R-module libre de rang C_n^i avec comme base

$$\{ e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_i} \mid 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_i \leq n \}$$

Rq : $K_i = 0$ si $i > n$ et $K_n \simeq R$ avec base $\{ e_1 \wedge \dots \wedge e_n \}$.

Posons pour $i < 0$ $K_i = 0$.

Ainsi Nous disposons de notre suite de modules pour construire le complexe de Koszul.

Nous allons maintenant définir les différentielles : Pour $i = 1, \dots, n$ posons :

$$\partial_i^k : K_i \longrightarrow K_{i-1}$$

$$e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i} \longmapsto \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+1} x_{j_k} e_{j_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{j_k} \wedge \dots \wedge e_{j_i}$$

Pour $i > n$ ou $i < 1$ on a $\partial_i^k = 0$

Comme les modules K_i sont libres de type fini avec des bases bien connues alors les morphismes ∂_i peuvent être écrits sous formes de matrices.

Pour K_1 la base $\{e_i\}$ peut être représenté par les matrices colonnes :

$$e_i \leadsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rappel : une application $\mathbb{R}$-linéaire

$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ avec les bases $\{e_i\}$ comme ci-dessus ; peut être représenté par une matrices $m \times n$ $\begin{pmatrix} \phi(e_1) & \cdots & \phi(e_n) \\ | & & | \\ | & & | \end{pmatrix}$

On sait que les matrice de ∂_i^k sont composées de 0 et de $\pm x_j$.

On peut voir immédiatement que :

$$\partial_1^k : K_1 \longrightarrow K_0$$
$$e_j \longmapsto x_j$$

Sa matrice est $A = (x_1, \dots, x_n)$

et aussi : $\partial_n^k : K_n \longrightarrow K_{n-1}$

$$e_1 \wedge \dots \wedge e_n \longmapsto x_1 e_2 \wedge \dots \wedge e_n - x_2 e_1 \wedge e_3 \wedge \dots \wedge e_n + \dots + (-1)^{n+1} x_n e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1}$$

Sa matrice est alors

$$B = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ (-1)^{n+1} x_n \end{pmatrix}$$

Le complexe s'écrira alors :

$$K_* = 0 \longrightarrow R \xrightarrow{B} R^n \longrightarrow \dots \longrightarrow R^n \xrightarrow{A} R \longrightarrow 0$$

On vérifie bien sûr

(a) $\partial_i^k \partial_{i+1}^{k+1} = 0 \quad \forall i$ (exercice)

(b) $H_0(K_\bullet) \simeq R/(x)$

$H_n(K_\bullet) \simeq \{r \in R / x_i r = 0, \forall i = 1, \dots, n\}$

$= \bigcap_{i=1}^{n} (0 :_R x_i)$

<u>Définition :</u>

Le complexe $K_\bullet$ ainsi construit s'appelle le complexe de Koszul à x, noté $K_\bullet(x)$ ou $K_\bullet(x ; R)$.

Pour un R-module M on définit

$K_\bullet(x, M) = K_\bullet(x) \otimes M$.

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M^n \xrightarrow{C_n^2} M^{C_n^2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Le $i^{ième}$ module de homologie est noté

$$H_i(K_\bullet(x ; M)) = H_i(x, M)$$

Propriétés du complexe de Koszul:

Rappel: Une résolution à gauche (resp à droite) d'un R-module M (N) est une suite exacte

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} E_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_3} E_2 \xrightarrow{d_2} E_1 \xrightarrow{d_1} E_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

(resp $0 \to M \xrightarrow{\varepsilon} N^0 \xrightarrow{d^0} N^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} N^n \xrightarrow{d^n} \cdots$)

le morphisme ε s'appelle une augmentation.

On peut noter $E_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ (resp. $0 \to M \xrightarrow{\varepsilon} N^\bullet$)

Une résolution est dite finie si la suite exacte est constituée d'un nombre fini de modules non nuls, la longueur d'une résolution finie est le maximum de indices n tq E_n ou $N^n \neq 0$.

✓ Si tous les modules de la résolution sont libres alors on parle de résolution libre.

✓ On dit aussi que la résolution est projective si les modules sont tous projectifs c'est à dire: P module projectif ssi $\forall M, N$ deux modules avec

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \overset{h}{\nearrow} & \downarrow f \\ P & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

avec $fh = g$.

propriétés du complexe de Koszul (suite

Prop^n 2 : si x est M-régulier, alors

$H_n(x; M) = 0$ pour $n > 0$

prop^n 1 : Si $x = x_1, \dots, x_n$ est R-régulier alors $K_\bullet(x)$ est une résolution libre de $R/(x$

Proposition :

Soit $x \in R$ et M un R-module avec $L_\bullet \longrightarrow R/(x) \longrightarrow 0$ une résolution libre. Si $\pi : R/(x) \longrightarrow M$ est un R-linéaire morphisme, alors il existe une chaîne de morphismes $k_\bullet(x) \xrightarrow{\phi} L_\bullet$ tq $H_0(\phi) = \pi$, c'est à dire

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K_n(x) & \xrightarrow{\partial_n^{K(x)}} & K_{n-1}(x) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & K_0(x) & \longrightarrow & R/(x \\
 & & \downarrow \phi_{n+1}^{(0)} & & \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_{n-1} & & \downarrow \phi_0 & \searrow^{\pi} & \\
\longrightarrow & L_{n+1} & \longrightarrow & L_n & \xrightarrow[\partial_n^L]{} & L_{n-1} & \longrightarrow \cdots & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0
\end{array}$$

Modèle minimal (additif)

Soit $\hat{C}$ une cochaine libre sur R avec $\hat{d}$ comme bord de degré total 1. Comme R-module $\hat{C} \simeq C \otimes R$, avec C un k-ev, le produit tensoriel est pris sur k.

Nous voulons trouver une cochaine libre qui est homotopiquement équivalent à $\hat{C}$ et qui a un rang minimal sur R.

On savait que ce complexe existe et est unique à isomorphisme près. On l'appelle le modèle minimal (additif) de $\hat{C}$.

NB: À ne pas confondre avec le modèle minimal de Sullivan (multiplicatif).

Le R-linéaire bord $\hat{d}$ peut s'écrire sous forme $\hat{d} = d + d'$ avec d bord de $C \otimes k$ et $d'(\hat{C}) \subset C \otimes I$ avec I l'idéal d'augmentation de R.

On construit le modèle minimal de la forme :

$$\overset{\cup}{C} \simeq \overset{\cup}{H} \oplus \overset{\cup}{N}$$

$\overset{\cup}{H}$ homotopiquement équivalent à $\overset{\cup}{C}$, il est appelé le modèle minimal (additif) de $\overset{\cup}{C}$, il est de la forme $\overset{\cup}{H} \simeq H \otimes R$.

Définition : Soit $\overset{\cup}{H} \simeq H \otimes R$ le modèle minimal ci-dessus. On définit :

$$\tilde{\mathcal{F}}_0(H) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}}_0(\overset{\cup}{H}) = 0$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_1(H) := \operatorname{Ker}\left(\overset{\cup}{d} : H \simeq H \otimes k \longrightarrow \overset{\cup}{H}\right)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_1(\overset{\cup}{H}) := \tilde{\mathcal{F}}_0(H) \otimes R$$

Si on suppose que $\tilde{\mathcal{F}}_i(\overset{\cup}{H}) := \tilde{\mathcal{F}}_i(H) \otimes R$ est défini on pose :

$$\tilde{\mathcal{F}}_{i+1}(H) := \overset{\cup}{d}^{-1}\left(\tilde{\mathcal{F}}_i(\overset{\cup}{H})\right) \cap (H \otimes k) \quad \text{et}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{i+1}(\overset{\cup}{H}) := \tilde{\mathcal{F}}_{i+1}(H) \otimes R.$$

La longueur de la filtration $\ell\left(\tilde{\mathcal{F}}_*(\overset{\cup}{H})\right)$ est le plus petit indice i pour lequel $\tilde{\mathcal{F}}_i(\overset{\cup}{H})$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{i+1}(\overset{\cup}{H})$ coïncident

Proposition:

(a) On a l'inclusion:

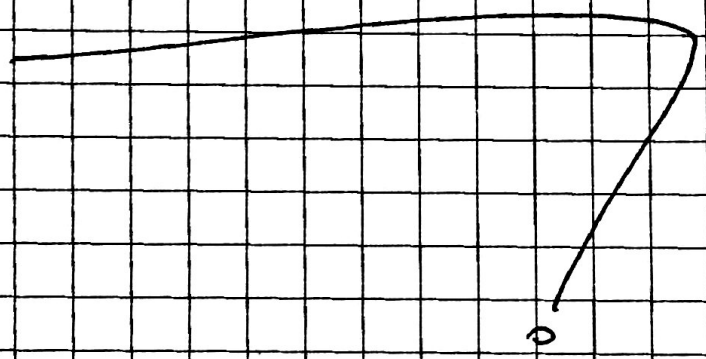
$$F_0(\overset{u}{H}) = 0 \subset F_1(\overset{u}{H}) \subset \dots \subset F_{\ell(F_*(\overset{u}{H}))}(\overset{u}{H}) = \overset{u}{H}$$

(b) $$\overline{d}\left(F_i(\overset{u}{H})\right) \subset F_{i-1}(\overset{u}{H}) \quad \forall i$$

(c) $$\dim_k H \geq \sum_q \ell(H^q) \geq \ell\left(F_*(\overset{u}{H})\right)$$

Corollaire:

$$\dim_k (H^*) \geqslant 2\left(\ell\left(F_*(\overset{u}{H})\right) - 1\right)$$



Fin

A Suivre ...

H. AAYA