Fibration, Cofibration

Cours M. Hilali
6 Decembre 2014

Motivation 2 problèmes en topologie alg : Problème de relèvement ; Problème d'extension

ⓐ Problème de relèvement : E, P, X esp. top. conn. par arcs

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\exists ?\, \tilde f"] & B \end{tikzcd}$$

$p\circ\tilde f = f$ $\quad$ $\tilde f$ s'appelle "relèvement de f"

Exemple: Théorème de relèvement

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde\gamma"] & S^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} t \arrow[d, mapsto] \\ e^{2i\pi t} \end{tikzcd}$$

$\tilde\gamma$ est unique à 1-près
ie si $\tilde\gamma_1$ est un autre relèvement, alors $\tilde\gamma_1 - \tilde\gamma$ à constante $= n$
preuve.
Unicité. On travaille dans Top_{ca} : catégorie des espaces top. connexes par arcs
Si $\tilde\gamma_1$ et $\tilde\gamma$ deux relèvement alors

$$p\circ\tilde\gamma_1(t) = e^{2i\pi\tilde\gamma_1(t)} = p\circ\tilde\gamma(t) = e^{2i\pi\tilde\gamma(t)}$$

donc $(\tilde\gamma_1 - \tilde\gamma)(t) \in \mathbb{Z}$ d'où $\tilde\gamma_1 - \tilde\gamma : I \xrightarrow{C^0} \mathbb{Z}$
$\Rightarrow (\tilde\gamma_1 - \tilde\gamma)(I)$ connexe dans $\mathbb{Z} \Rightarrow \tilde\gamma_1 - \tilde\gamma = cste.$

Existence. Construction du relèvement
chose particulière $S^1 \setminus \{e^{2i\pi t_0}\}$

$I_n =]t_0+n, t_0+n+1[\,,\ n\in\mathbb{Z}$

$$p_n = p_{|I_n} : \begin{array}{ccc} I_n & \xrightarrow{C^0} & S^1\setminus\{e^{2i\pi t_0}\} \\ t & \longmapsto & e^{2i\pi t} \end{array} \quad \text{(Revêtement)}$$

p_n est un homéom.
p_n surj, clair
Soit $e^{2i\pi\theta} \in S^1\setminus\{e^{2i\pi t_0}\}$

$\theta \not\equiv t_0\ [1]$ car $e^{2i\pi\theta} \neq e^{2i\pi t_0}$

$p_n(t) = \cancel{M}\, e^{2i\pi t} = e^{2i\pi\theta}$

$n < \theta\, t_0 < n+1$
$0 < \theta - t_0 - n < 1$
$k = [\theta - t_0] - n$
$\theta + k \in]t_0+n, t_0+n+1[$

p_n injective
$p_n(t_1) = p_n(t_2) \Leftrightarrow t_1 - t_2 \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} t_0+n < t_1 < t_0+n+1 \\ -t_0-n-1 < -t_2 < -t_0-n \end{array}\right\} \Rightarrow -1 < t_1 - t_2 < 1$$

p_n^{-1} continue. En effet

Soit $t \in I_n$ et soit $\varepsilon > 0$; $t_0+n < t-\varepsilon < t+\varepsilon < t_0+n+1$

(fermé d'un compact est un compact)

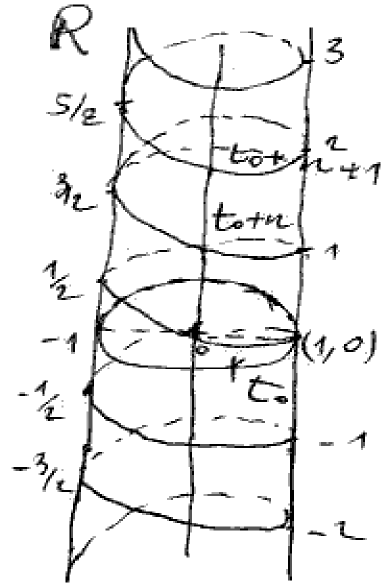
$0 < \varepsilon < \min\{t-t_0-n,\ t_0+n+1-t\}$

$V_\varepsilon = [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \subset I_n \Rightarrow V_\varepsilon$ compact

donc $p_n(V_\varepsilon)$ compact $\Rightarrow p_n(V_\varepsilon)$ fermé

ça prouve que p_n^{-1} continue

$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$



Conclusion: $p_n^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{e^{2i\pi t_0}\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$

avec

· $I_n \cap I_m = \emptyset$ si $n \neq m$

· $p|_{I_n} : I_n \xrightarrow{\text{homéom}} \mathbb{S}^1 \setminus \{e^{2i\pi t_0}\}$

Idée de la construction

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, dashed, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

$p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

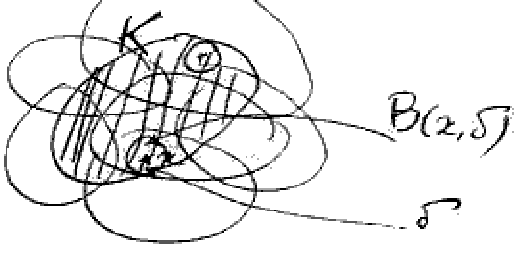
si $\tilde{\gamma}(J) \subset I_n$

sur J on aura $\tilde{\gamma} = p_n^{-1} \circ \gamma$

on va utiliser le nombre de Lebesgue

Si (K,d) un espace métrique et $(V_i)_{i \in \Lambda}$ est un recouvrement ouvert de K, alors $\exists\, \delta > 0$ (nombre de Lebesgue)

$\forall x \in K,\ \exists i_x \in \Lambda$; $B(x,\delta) \subset V_{i_x}$



Soit $U^+ = \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$, $U^- = \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$

$V_1 = \gamma^{-1}(U^+)$, $V_2 = \gamma^{-1}(U^-)$

$\{V_1, V_2\}$ recouvrement de I

alors $\exists N \in \mathbb{N}^*$; $\forall j \in [\![0, N-1]\!]$

l'intervalle $\left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right] \subset V_{i_j}$, où $i_j \in \{1,2\}$

donc $p\left(\left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}\right]\right) \subset U^{\pm}$

Soit $\gamma(0) = b_0$ et x_0 ; $p(x_0) = b_0$

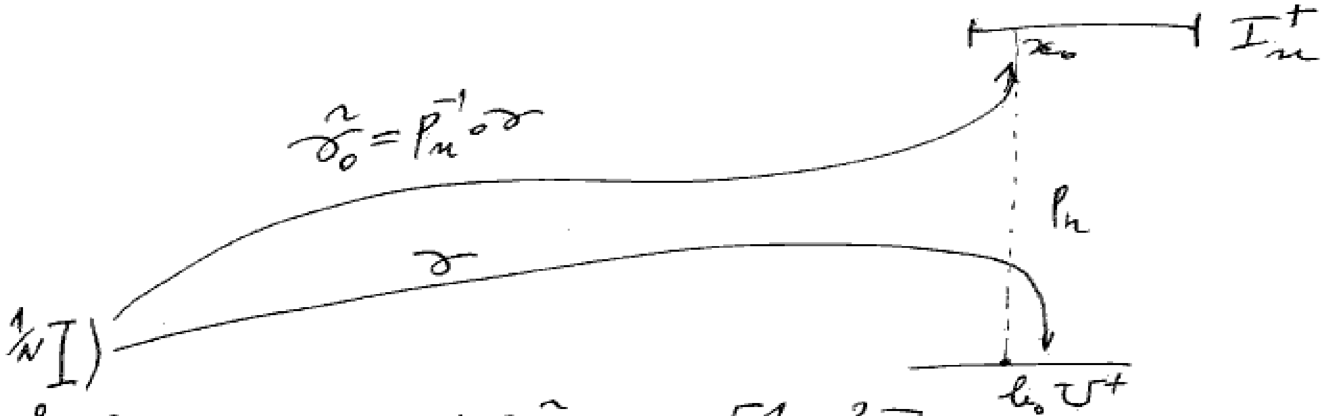
on suppose que $b_0 \in U^+$

$b_0 = e^{2i\pi t_0}$

$\exists n$; $x_0 \in]t_0+n, t_0+n+1[= I_n$

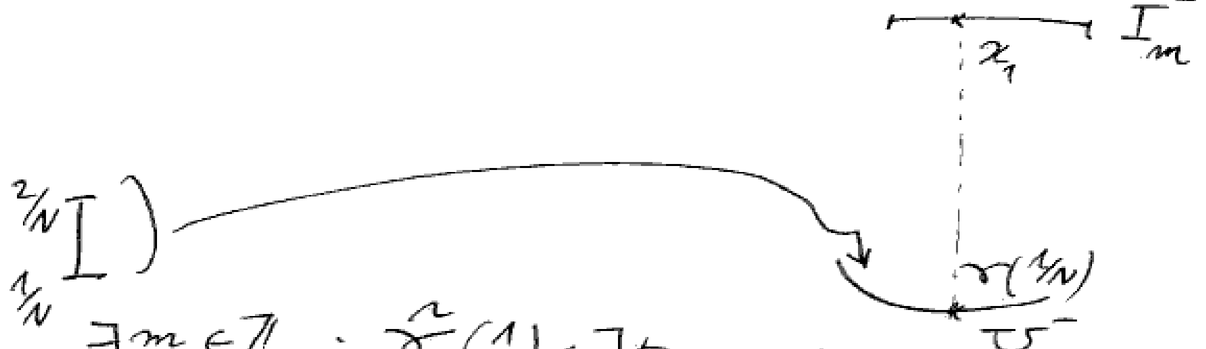
on suppose de plus que $p([0, \frac{1}{N}]) \subset U^+$

on pose $\tilde{\gamma}_0 : [0, \frac{1}{N}] \longrightarrow I_n^+$; $\tilde{\gamma}_0 = p_n^{-1} \circ \gamma$



Construction de $\tilde{\gamma}$ sur $[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]$

$\gamma : [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}] \subset U^{\pm}$ on suppose que, par exemple $\gamma([\frac{1}{N}, \frac{2}{N}]) \subset U^-$, on pose $x_1 = \tilde{\gamma}_0(\frac{1}{N})$



$\exists m \in \mathbb{Z}$; $\tilde{\gamma}_0(\frac{1}{N}) \in]t_1 + m, t_1 + m + 1[= I_m^-$

$e^{2i\pi t_1} = e^{2i\pi x_1} \Longrightarrow x_1 - t_1 \in \mathbb{Z}$

on construit $\tilde{\gamma}_1 : [\frac{1}{N}, \frac{2}{N}] \longrightarrow I_m^-$

$\tilde{\gamma}_n = p_n^{-1} \circ \gamma$

$\tilde{\gamma}_1(\frac{1}{N}) = x_1 = \tilde{\gamma}_0(\frac{1}{N})$ et ainsi de suite.

En topologie algébrique :

Remarque : En topologie algébrique, on s'intéresse aux objets à homotopie près, donc les relèvements des homotopies qui nous intéressent.

ie

$$(*) \quad \begin{tikzcd} X \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & B \end{tikzcd}$$

$pf = Fi$

Existe t-elle une extension $\tilde{F}$?

<u>Definition</u> On dit que (E, p, B) est une fibration ssi
(i) $E, B \in Top_{ca}$
(ii) $\forall X$ connexe par arcs, le diagramme (*) admet une solution $\tilde{F}$ vérifiant

$$\begin{cases} \tilde{F} i = f \\ p \circ \hat{F} = F \end{cases}$$

$F_{b_0} = p^{-1}(b_0)$, où b_0 point base de B s'appelle la fibre type au-dessus de b_0.

Toutes les fibres sont homotopes.