Thèse de Doctorat intitulée:

La Conjecture de Hilali pour les Espaces de Configurations

Thèse présentée et soutenue par:
Hicham YAMOUL

Faculté des Sciences Ain Chock
Université Hassan II-Casablanca
Groupe de Recherche Marocain en Théorie d'Homotopie Rationnelle

Exposé de thèse 17 Février 2016

Plan de l'exposé

La Conjecture de Hilali fait l'objet de plusieurs travaux de recherche en théorie de l'homotopie rationnelle. Après presque 26ans, elle reste non encore résolue dans sa totalité, les modèles algébriques des espaces furent des outils puissants de raisonnement pour la prouver, et comme les espaces de configurations sont devenus de plus en plus intéressants, grâce aux propriétés topologiques distinguées, la vérification de la conjecture pour ce type d'espaces était une opportunité. Et ce pour déployer les divers résultats afin d'en dégager d'autres, y compris la preuve de la Conjecture de Hilali pour les espaces de configurations d'une variété fermée simplement connexe, d'autres résultats ont été établis dans cette thèse, il s'agit d'un modèle des espaces de configurations d'orbites, et un théorème de classification d'espace elliptique 1-connexe en dimension cohomologique égale à 8 de caractéristique homotopique nulle.

La théorie de l'homotopie rationnelle permet de trouver les types d'homotopie des espaces topologiques à l'aide des structures algébriques dites modèles minimaux.

La théorie des espaces de configurations ne sesse de se développer grâce aux propriétés topologiques et géométriques remarquables de ces espaces, ils figurent dans la théorie des groupes de tresses, en physique (physique des particules), et en robotique,... leur étude topologique reste la plus dominante.

Combiner ces deux théories c'est résoudre des problèmes des espaces de configurations en faisant appel aux techniques de la théorie de l'homotopie rationnelle.

D'où l'idée de vérifier la conjecture de Hilali pour les espaces de Configurations, on se contente dans le contexte des espaces de Configurations des variétés fermées simplement connexes.

Le modèle d'un espace topologique

Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué, on pose $V^{-n} := V_n$ quand $n \leq -1$. On munit V d'une différentielle, c'est à dire une application linéaire d telle que $d : V^n \to V^{n+1}, d : V_n \to V_{n-1}$ vérifiant $d^2 = 0$.
A partir de V on construit une algèbre différentielle graduée commutative (en abrégé adgc) notée ΛV de la manière suivante :
On note par $TV := \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k V$ où $T^k V := V \otimes ... \otimes V$ k fois ; l'algèbre tensorielle engendrée par V, et on note par I l'idéal engendré par $v \otimes w - (-1)^{|v||w|} w \otimes v$.
La différentielle sur ΛV est prolongée par linéarité à partir de celle définie sur V, en respectant la formule dite de Leibniz suivante :
$d(x.y) = (dx).y + (-1)^{|x|} x.dy, \forall x, y \in \Lambda V$

Le modèle d'un espace topologique

On construit ainsi l'adgc $(\Lambda V, d)$ où $\Lambda V = TV/I$, qui joue un rôle fondamental dans la théorie de l'homotopie rationnelle.
D'autre part, $\forall k \in \mathbb{N}$,$\Lambda^k V$ désigne le $\mathbb{Q}$-sous espace vectoriel de ΛV engendré par les mots de ΛV de longueur constante égale à k.
Plus précisément : $x \in \Lambda^k V \Leftrightarrow x = \sum \alpha v_{i_1} ... v_{i_k}$ où $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $v_{i_1}, ..., v_{i_k} \in V$.
De plus, on note $\Lambda^{\geq k} V := \bigoplus_{i \geq k} \Lambda^i V$.
Ce qui permet de munir ΛV de deux graduations; celle du degré herité de la graduation de V, et celle de la longueur des mots.
De ce qui précède, on a : $\Lambda V = \text{Exterior}\, V^{odd} \otimes \text{Sym}\, V^{even}$.

Le modèle de Sullivan

Definition

On appelle *modèle minimal de Sullivan*, toute algèbre différentielle graduée commutative (adgc), vérifiant les deux propriétés suivantes : $V^1 = 0$, et $dV \subset \Lambda^{\geq 2} V$.

Denis Sullivan a associé à tout espace topologique simplement connexe X, dont la cohomologie singulière $H^*(X;\mathbb{Q})$ est de type fini (i.e. $\dim H^k(X;\mathbb{Q}) < \infty, \forall k$ un modèle minimal de Sullivan $(\Lambda V, d)$ unique à isomorphisme près tel que

$$V \cong \mathrm{Hom}(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}, \mathbb{Q})$$

$$H^*(\Lambda V, d) \cong H^*(X;\mathbb{Q}).$$

Le modèle de Sullivan

Exemples de modèle minimal de :

• La sphère impaire $\mathbb{S}^{2n+1}; n \geq 1$ a pour modèle minimal de Sullivan, $(\Lambda(x), 0)$ où $|x| = 2n+1$.
$\dim \pi_*(S^{2n+1}) \otimes \mathbb{Q} = \dim \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \otimes \mathbb{Q} = 1$, et
$H^*(S^{2n+1}; \mathbb{Q}) = \Lambda(x)$.

• La sphère paire $\mathbb{S}^{2n}; n \geq 1$ a pour modèle minimal de Sullivan, $(\Lambda(x, y), d)$ où $|x| = 2n, |y| = 4n - 1$, avec $dx = 0$ et $dy = x^2$,
$H^*(S^{2n}; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}_1[x]$. Et
$\dim \pi_{2n}(S^{2n}) \otimes \mathbb{Q} = \dim \pi_{4n-1}(S^{2n}) \otimes \mathbb{Q} = 1$

• L'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ a pour modèle minimal de Sullivan tel que $H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Q}) = \Lambda x/(x^{n+1}), |x| = 2$. De plus
$\dim \pi_*(\mathbb{CP}^n) \otimes \mathbb{Q} = 2$.

Espace elliptique, espace hyperbolique

Definition

Un espace topologique X, 1-connexe est dit rationnellement elliptique si $\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$ et $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) < \infty$.
L'espace X est dit rationnellement hyperbolique si $\sum_{p\geq 2} \dim \pi_p(X) \otimes \mathbb{Q} = \infty$.
On définit la dimension formelle notée $\mathrm{fd}(X)$ comme suit

$$\mathrm{fd}(X) := \max\{i; H^i(X;\mathbb{Q}) \neq 0\}$$

De même, on définit un modèle minimal de Sullivan elliptique comme un modèle minimal $(\Lambda V, d)$ tel que $\dim V < \infty$ et $\dim H(\Lambda V, d) < \infty$.

Espace elliptique, espace hyperbolique

Un théorème fondamental qui donne une interpretation topologique dû à Friendlander et Halperin s'énonce comme suit :

Theorem (Friedlander-Halperin)

Supposons que X est rationnellement elliptique de dimension formelle n. Alors (i) $\dim \pi_{odd}(X) \otimes \mathbb{Q} \geq \dim \pi_{even}(X) \otimes \mathbb{Q}$.
(ii) Si $\{x_j\}$ est une base de $\pi_{odd}(X) \otimes \mathbb{Q}$ et $\{y_i\}$ une base de $\pi_{even}(X) \otimes \mathbb{Q}$, alors $n = \sum |x_j| - \sum(|y_i| - 1)$.
(iii) $n \geq \sum |y_i|$ et $2n - 1 \geq \sum |x_j|$
(iv) $\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$, pour $i \geq 2n$.

Corollary

Si $(\Lambda V, d)$ est elliptique de dimension formelle n, alors $V^p = 0$, $p \geq 2n$

Caractéristiques d'Euler-Poincaré

Definition

Pour tout espace topologique elliptique, X, on appelle caractéristique d'Euler-Poincaré les deux invariants suivants :

- Invariant cohomologique : $\chi_c(X) := \sum_{k\geq 0}(-1)^k \dim H^k(X;\mathbb{Q})$.
- Invariant homotopique : $\chi_\pi(X) := \sum_{k\geq 0}(-1)^k \dim(\pi_k(X)\otimes\mathbb{Q})$.

On peut aussi définir ces invariant par le modèle minimal $(\Lambda V, d)$ d'un espace topologique elliptique simplement connexe X, et on a :

$$\chi_c(\Lambda V, d) = \dim H^{pair}(\Lambda V, d) - \dim H^{impair}(\Lambda V, d),$$

$$\chi_\pi(\Lambda V, d) = \dim V^{pair} - \dim V^{pair}$$

Caractéristiques d'Euler-Poincaré

S.Halperin a donné la relation entre l'ellipticité d'un espace topologique et les caractéristiques d'Euler-Poincaré par les résultats suivants :

Theorem (Halperin)

Si $(\Lambda V, d)$ *est elliptique, simplement connexe alors :*
(1) $\chi_\pi(\Lambda V, d) \leq 0$ *et* $\chi_c(\Lambda V, d) \geq 0$.
(2) Les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\chi_\pi(\Lambda V, d) = 0$
(ii) $\chi_c(\Lambda V, d) > 0$
(iii) $H^{impair}(\Lambda V, d) = 0$.

Espace, Algèbre à dualité de Poincaré

Un espace X, 1-connexe de dimension n est à dualité de Poincaré est un espace ayant une adgc (A, d) qui vérifie les propriétés suivantes :
(1) Il y a des quasi-isomorphismes $(A, d) \xleftarrow{\simeq} (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$.
(2) $A^p = 0$ pour $p > n$, $A^0 = \mathbb{Q}$, $A^1 = 0$, tout A^q est de dimension finie et $A^n = \mathbb{Q}\mu$ où μ est appelé la classe fondamentale de A.
(3) L'application $\varphi : A^p \to \hom(A^{n-p}, \mathbb{Q})$ donnée par $\varphi(a)(b) = \lambda$ si $ab = \lambda\mu$, est un isomorphisme.
Autrement dit, pour tout p avec $0 \leq p \leq n$, la multiplication $A^p \times A^{n-p} \to A^n \cong \mathbb{Q}$ est une forme bilinéaire non dégénérée.

Espace, Algèbre à dualité de Poincaré

Quand dim $V < \infty$ et $V = V^{impair}$, $(\Lambda V, d)$ est une algèbre à dualité de Poincaré. Le résultat suivant dû à Lambrechts et Stanley généralise ce fait ;

Theorem (Lambrechts-Stanley)

Toute variété compacte et simplement connexe admet un modèle à dualité de Poincaré.

Espace, Algèbre à dualité de Poincaré

Formule de la dimension :

Proposition

Soit $\{f_1, ..., f_n\}$ *une suite régulière d'éléments gradués dans un anneau de polynômes* $\mathbb{Q}[x_1, ..., x_n]$. *On peut supposer que pour tout* $i = 1, ..., n$, f_i *n'a pas de terme constant ou terme linéaire et que*

$$|x_1| \leq ... \leq |x_n|, |f_1| \leq ... \leq |f_n|.$$

Posons $A = \mathbb{Q}[x_1, ..., x_n]/(f_1, ..., f_n)$. *Alors on a*

$$\dim_{\mathbb{Q}} A = |f_1|...|f_n|/|x_1|...|x_n|.$$

La Conjecture de Hilali

En 1990, M.R.Hilali a énoncé la conjecture suivante :

Conjecture: (Version topologique)

Si X est un espace elliptique simplement connexe, alors

$$\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \leq \dim H^*(X;\mathbb{Q}).$$

La Conjecture de Hilali

En termes de modèles minimaux, la conjecture peut aussi être formulée sous la version algébrique ;

Conjecture: (Version algébrique)

Si $(\Lambda V, d)$ est un modèle minimal de Sullivan elliptique 1-connexe, alors

$$\dim V \leq \dim H^*(\Lambda V, d).$$

La Conjecture de Hilali

Beaucoup de topologistes ont contribué à la résolution de la conjecture ; en 1990, M.R.Hilali fut le premier qui l'a résolu dans le cas d'un modèle pur (c.à d. $dV^{pair} = 0$ et $dV^{impair} \subset \Lambda V^{pair}$).
En 2008, M.R.Hilali et My.I.Mamouni ont résolu la conjecture dans le cas formel ; $(\Lambda V, d) \cong (H^*(\Lambda V, d), 0)$, les cas des H-espaces, nilvariétés, variétés symplectiques et cosymplectiques et bien d'autres cas spéciaux.
En 2011, O. Nakamura et T. Yamaguchi ont résolu la conjecture dans le cas d'un modèle $(\Lambda V, d)$ dont $\mathrm{fd}(\Lambda V) \leq 16$.
En 2012, Murillo et al., ont résolu la conjecture pour les modèles hyperelliptiques, i.e. $dV^{pair} = 0$, et $dV^{impair} \subset \Lambda^+ V^{pair} \otimes \Lambda V^{impair}$

La Conjecture de Hilali

En 2015, M.Amann a résolu la conjecture dans le cas des espaces dits espaces à multi-étages.

En 2015, B.Benlkrafi, M.R.Hilali et My.I.Mamouni ont résolu la conjecture dans le cas des espaces coformels.

En 2015, M.R.Hilali, M.I.Mamouni et Y. ont résolu la conjecture pour les espaces de configurations d'une variété fermée simplement connexe sous certaines conditions.

Problème : Etant donnée une variété simplement connexe vérifiant la conjecture de Hilali, est-ce que ses espaces de configurations la vérifient aussi ?

Introduction

Les espaces de configurations ont été introduits et étudiés pour la première fois en 1962 par E.Fadell et L.Neuwirth, ensuite, beaucoup de topologistes se sont impliqués dans l'étude de la topologie et la géométrie de ces espaces, parmis les pioniers, F.Cohen, Y.Félix, J.-C.Thomas, Lambrechts,...
l'espace de configurations ordonnées de k points d'un espace X est le sous-espace de X^k défini par

$$F(X;k) = \{(x_1, ..., x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}.$$

Clairement, on a $F(X;1) = X$ et si deux espaces X et Y sont homéomorphes, alors il en est de même pour leurs espaces de configurations à k points. Comment les espaces de configurations se comportent-ils avec le type d'homotopie ?

Théorème de Fadell-Neuwirth

Soit M une variété de dimension $n \geq 2$, $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de points de M, deux à deux distincts, et $Q_m = \{q_1, ..., q_m\}, m \geq 1$.

Theorem

La projection canonique

$$p_i : F(M, k) \rightarrow F(M, k-1)$$

est une fibration de fibre $M - Q_{k-1}$

Le théorème de Fadell-Neuwirth s'énonce ainsi :

Théorème de Fadell-Neuwirth

Theorem (Fadell-Neuwirth)

La projection $p_r : F(M \setminus Q_m; k) \to F(M \setminus Q_m; r)$ *sur les* $r \leq k$ *premiers facteurs, définit un fibré localement trivial de fibre* $F(M \setminus Q_{m+r}; k-r)$*. De plus, si* $m \geq 1$*, alors* p_r *admet une section.*

Corollary

Soient M *une variété fermée, et* $I = (i_1, ..., i_r)$ *une suite d'entiers avec* $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq k$*. Alors la projection composée* $p_I = p_{i_1} \circ ... \circ p_{i_r}$ *est une fibration*

$$p_I : F(M, k) \to F(M, k-r)$$

de fibre $F(M \setminus Q_{k-r}, r)$

Homotopie de $F(M, k)$

Si $k \geq 2$, l'espace $M \setminus Q_k$ a le type d'homotopie du bouquet de $M \setminus Q_1$ avec le bouquet de $k-1$ copies de sphères S^{n-1};

$$M \setminus Q_k \simeq (M \setminus Q_1) \vee (\vee_{k-1} S^{n-1}).$$

Le théorème suivant dû à Y.Félix et J-C. Thomas donne l'homotopie rationnelle en fonction de celle des variétés $M \setminus Q_i$,

Theorem (Félix-Thomas)

Si l'algèbre de cohomologie de M nécessite au moins deux générateurs, alors on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\pi_*(F(M;k)) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{i=0}^{k-1} \pi_*(M \setminus Q_i) \otimes \mathbb{Q}$

Homotopie de $F(M, k)$

Proposition

Pour $n \geq 3$ et pour $1 \leq r < k$, l'espace $F(\mathbb{R}^n \setminus Q_r, k-r)$ est simplement connexe.

En utilisant une suite exacte longue d'une fibration, on montre le théorème fondamental suivant

Theorem

Il y a un isomorphisme

$$\pi_*(F(\mathbb{R}^n, k)) \cong \bigoplus_{r=2}^{k-1} \pi_*(\mathbb{R}^n \setminus Q_r) \cong \bigoplus_{r=2}^{k-1} \pi_*((\mathbb{S}^n)^{\vee r})$$

de modules.

Homotopie de $F(M, k)$

Theorem (Fadell)

Si $\mathbb{S}^n$ est une $n-$sphère, alors pour $k \geq 4$

$$\pi_i(F(\mathbb{S}^n; k)) = \pi_i(V_{n+1,2}) \oplus \bigoplus_{r=2}^{k-2} \pi_i(\underbrace{\mathbb{S}^{r-1} \vee \ldots \vee \mathbb{S}^{r-1}}_{r}), \quad i \geq 2.$$

où $V_{n+1,2}$ est la variété de Stiefel des 2-repères orthonormés dans le $(n+1)-$espace euclidien.
$\pi_i(F(\mathbb{S}^n, 2)) = \pi_i(\mathbb{S}^n) \quad i \geq 1.$
$\pi_i(F(\mathbb{S}^n, 3)) = \pi_i(V_{n+1,2}) \quad i \geq 1.$

Cohomologie de $F(M, k)$

Etant donné un espace topologique X avec des nombres de Betti finis, $\beta_i(X)$, on note leur série de Poincaré par

$$P_X(t) := \sum_{i \geq 0} \beta_i(X) t^i$$

Theorem (Sohail)

Le polynôme de Poincaré d'espace de Configuration $F(\mathbb{CP}^m, 2)$ est donné par le produit des polynômes cyclotomiques

$$P_{\mathbb{CP}^m}(t) = \prod_{\substack{d \mid m(m+1) \\ d \neq 1}} \phi_d(t^2).$$

Espaces de Configurations non ordonnées

Soit $\mathcal{G}_k$ le groupe symétrique, agissant librement sur $F(X,k)$ où X est un espace topologique. Cette action est donnée par :
$\forall\sigma \in \mathcal{G}_k, \sigma(x_1, ..., x_k) = (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)})$.
Ceci définit le revêtement

$$F(X,k) \to C(X,k) := F(X,k)/\mathcal{G}_k.$$

L'espace $C(X,k)$ s'appelle l'espace de configurations non ordonnées de k dans X.

Modèles de $F(M, k)$

Soit M une variété fermée orientée de dimension n.

Definition

Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une base homogène de $H^*(M;\mathbb{Q})$. La classe diagonale de M est la classe définie par

$$\Delta = \sum_{i\in I}(-1)^{|\alpha_i|}\alpha_i \otimes \beta_i \in (H^*(M) \otimes H^*(M))^n.$$

Notons que Δ ne dépend pas du choix de la base.
L'intérêt de l'idéal (Δ) engendré par Δ, figure dans le théorème fondamental suivant dû à F.Cohen et L.Taylor :

Modèles de $F(M,k)$

Theorem (Cohen-Taylor)

Il existe un isomorphisme d'algèbres

$$H^*(F(M;2);\mathbb{Q}) \cong \frac{H^*(M;\mathbb{Q}) \otimes H^*(M;\mathbb{Q})}{(\Delta)}.$$

Definition

On dit que M est une variété polygène si son algèbre de cohomologie rationnelle $H^*(M;\mathbb{Q})$ nécessite au moins deux générateurs en tant qu'algèbre. Dans le cas contraire, M est dite monogène.

Modèles de $F(M,k)$

L'algèbre de cohomologie d'une variété monogène possède l'une des deux formes suivantes :
Soit $H^*(M;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x]/(x^k)$ avec $|x| = 2l$,
soit $H^*(M;\mathbb{Q}) = \Lambda(x)$ avec $|x| = 2l+1$.
Dans ce premier cas, nous avons $F(M;2) \approx_0 F(S^{2l+1};2) \approx S^{2l+1}$.
Le deuxième cas se donne par le théorème de Roisin ;

Theorem (Roisin)

Le modèle minimal de Sullivan de $F(M;2)$ est l'algèbre de cochaînes $(\Lambda(a,b,a',c),D)$ où $Da = Da' = 0$, $Db = a^k$ et $Dc = \sum_{i=0}^{k-1} a^i a'^{k-i-1}$.

Modèles de $F(M,k)$

- **Modèle de Kriz-Totaro**

Notons d'abord $p_i : M^k \to M$ la projection sur la i-ème coordonnée et $p_{ij} : M^k \to M^2$ la projection sur les coordonnées i et j. Posons $\Delta_{ij} = p_{ij}^*(\Delta) \in H^*(M;\mathbb{Q})^{\otimes k}$. Alors le modèle de Kriz-Totaro se décrit par le théorème suivant

Theorem

Soit M une variété projective complexe de dimension n. Alors un modèle pour $F(M;k)$ est donné par l'algèbre différentielle graduée

$$(H^*(M;\mathbb{Q})^{\otimes k} \otimes \wedge(e_{ij}, i,j = 1,...,k)/I, d)$$

où $|e_{ij}| = n-1, d(e_{ij}) = \Delta_{ij}$ et l'idéal I est engendré par les relations dites d'Arnold :

Modèles de $F(M,k)$

- **Modèle de Kriz-Totaro**

$$\begin{cases} e_{ij} = e_{ji}, \\ e_{ij}e_{jr} + e_{jr}e_{ri} + e_{ri}e_{ij}, \\ p_i^*(x).e_{ij} = p_j^*(x).e_{ij}. \end{cases}$$

Modèles de $F(M,k)$

• **Modèle de Lambrechts-Stanley**

Supposons maintenant que M est une variété compacte de dimension n, simplement connexe et soit (A,d) un modèle à dualité de Poincaré pour M avec la classe diagonale Δ_A. On peut ainsi construire une nouvelle algèbre différentielle graduée commutative en remplaçant $(H^*(M;\mathbb{Q}),0)$ par (A,d) dans le modèle de Kriz et Totaro. On note cette fois-ci $p_i : A \to A^{\otimes k}$ l'injection $p_i(a) = 1 \otimes ... \otimes a \otimes ... \otimes 1$ avec l'élément a dans la i-ème position. Et d'une manière similaire $p_{ij} : A^2 \to A^k$l'application qui envoie $a \otimes b$ vers $x_1 \otimes ... \otimes x_k$ avec $x_i = a, x_j = b$ et les autres $x_i = 1$.

Modèles de $F(M, k)$

- **Modèle de Lambrechts-Stanley**

Theorem

Soit M une variété fermée simplement connexe, qui admet un modèle ADGC (A, d) où A est une algèbre à dualité de Poincaré de dimension formelle n. Alors $F(M, k)$ admet l'adgc notée $F(A, k)$ suivante comme modèle

$$F(A,k) := (\frac{A^{\otimes k} \otimes \wedge(e_{ij} : 1 \leq i < j \leq k)}{I}, d(e_{ij}) = p_{ij}^*(\Delta_A))$$

où $|e_{ij}| = n - 1$ et I l'idéal engendré par les relations d'Arnold.

Introduction

En 1997, M.Xicotencatl a introduit les espaces de configurations d'orbites associées à l'action d'un groupe fini.
Soient M une variété connexe de dimension n et G un groupe fini, nous supposons que G agit librement sur M. On note $Gx := \{gx; g \in G\}$ l'orbite d'un élément x de M sous l'action de G. On définit *les espaces de configurations d'orbites* par
$F_G(M,k) := \{(x_1, ..., x_k) \in M^k; Gx_i \cap Gx_j = \varnothing \text{ si et seulement si } i \neq j\}$
ou encore
$F_G(M,k) = \{(x_1, ..., x_k) \in M^k; Gx_i = Gx_j \text{ si et seulement si } i = j\}$.

Résultats de Xicotencatl

La relation principale qui lie l'espace de configurations d'orbites avec les espaces de configurations ordinaires est donnée par le résultat suivant dû à Xicotencatl :

Proposition

Soit G un groupe fini agissant sur M tel que la projection canonique $M \to M/G$ est un G-fibré principal, alors G^k agit sur $F_G(M,k)$ et $F_G(M,k)/G^k \approx F(M/G,k)$.

En particulier, il y a G^k-fibré principal :
$G^k \to F_G(M,k) \to F(M/G,k)$. Plus précisément, l'action de G^k induit une action sur la cohomologie, et nous avons :

Résultats de Xicotencatl

Theorem

Soit G un groupe fini agissant librement sur une variété M et soit R un anneau où $|G|$ est inversible dans R. Alors il existe un isomorphisme d'algèbre de cohomologie

$$H^*(F(M/G,k);R) \cong H^*(F_G(M,k);R)^{G^k}$$

où $(-)^{G^k}$ désigne le module des invariants.

Résultats de Xicotencatl

Un résultat analogue à celui de Fadell-Neuwirth de fibrations pour les espaces de configurations ordinaires, qui assure l'existence de la fibre, a été démontré par Xicotencatl, pour tout entier naturel l, soit $Q_l^G \subset M$ l'union de l orbites distinctes,

Proposition

Soit M une variété tel que G agit de manière discrète et M/G soit une variété. Alors pour $l \leq k$, la projection $p : F_G(M,k) \to F_G(M,l)$ sur les l premières coordonnées est un fibré localement trivial, de fibre $F_G(M - Q_l^G, k - l)$.

La Conjecture de Hilali pour les espaces de Configurations

Dans cette section, nous présentons nos résultats répondant à la Conjecture, commençons par :

Proposition (Hilali-Mamouni-Y)

L'espace de configuration de $\mathbb{CP}^n$ à deux points est elliptique et

$$\dim \pi_* F(\mathbb{CP}^n, 2) \otimes \mathbb{Q} \leq \dim H^*(F(\mathbb{CP}^n, 2); \mathbb{Q}).$$

On utilise dans la preuve le résultat de Sohail et la fibration

$$\mathbb{S}^1 \times \Omega\mathbb{S}^{2n-1} \to F(\mathbb{CP}^n, 2) \to \mathbb{S}^1 \times \Omega\mathbb{S}^{2n+1},$$

La Conjecture de Hilali pour les espaces de Configurations

Proposition (Hilali-Mamouni-Y)

Si M est une variété projective fermée, alors $F(M;2)$ vérifie la conjecture de Hilali pourvu que $F(M;2)$ soit elliptique.

Et dans le cas d'une variété monogène, nous montrons ;

Proposition (Hilali-Mamouni-Y)

Si M est une variété fermée simplement connexe dont la cohomologie rationnelle est engendrée par un seul élément, alors

$$\dim \pi_* F(M,2) \otimes \mathbb{Q} \leq \dim H^*(F(M,2);\mathbb{Q}).$$

La Conjecture de Hilali pour les espaces de Configurations

Il y a des cas où les espaces de configurations de la variété M sont rationnellement hyperboliques, nous montrons le théorème suivant en utilisant le théorème de Félix-Thomas et le théorème de Fadell-Neuwirth, avec les notations

$\overset{\circ}{M} := M - \{\text{point}\}$, $\overset{\circ\circ}{M} := M - \{2 \text{ points}\}$;

Theorem (Hilali-Mamouni-Y)

Si M est simplement connexe et fermée de dimension ≥ 3, et si $X = \overset{\circ}{M}$ a un groupe d'homotopie rationnel non trivial de dimension > 1, alors $F(X, 2)$ et $F(M, k)$ pour $k > 3$, sont rationnellement hyperboliques.

La Conjecture de Hilali pour les espaces de Configurations

Theorem (Hilali-Mamouni-Y)

Si M est une variété simplement connexe de dimension au moins 3, et si M a la cohomologie rationnelle ayant au moins deux éléments linéairement indépendants, alors $F(M;k), k \geq 3$ est hyperbolique.

L'argument se base sur le théorème de Fadell-Neuwirth.

La Conjecture de Hilali pour les espaces de Configurations

Ce théorème prouve la conjecture de Hilali en utilisant le théorème de Fadell ;

Theorem (Hilali-Mamouni-Y)

Si M est une variété simplement connexe et fermée, alors $\dim \pi_*(F(M;k)) \otimes \mathbb{Q} \leq \dim H^*(F(M;k);\mathbb{Q})$ *pourvu que* $F(M;k)$ *soit elliptique.*

Le modèle des espaces de configurations d'orbites

Soit A une ADGC à dualité de Poincaré orientée de dimension formelle m. Les points de la variété M/G sont en bijection avec les orbites associées à l'action du groupe G sur M; $G \curvearrowright M$. L'action de G sur M induit une ADGC qu'on note A_G et la classe diagonale d'orbites associée à A_G est donnée par

$$\Delta_G := \sum_{g,h\in G} \sum_{l=1}^{N} (-1)^{|a_l|} g a_l \otimes h a_l^* \in A_G \otimes A_G$$

on définit l'algèbre $F_G(A;k)$ comme suit
$F_G(A;k) := (A_G^{\otimes k} \wedge (\overline{e_{ij}} : 1 \leq i < j \leq k)/I, d(\overline{e_{ij}}) = p_{ij}^*(\Delta_G))$

Le modèle des espaces de configurations d'orbites

Le théorème suivant donne le modèle qui décrit le type d'homotopie rationnelle de $F_G(M;k)$;

Theorem (Grant-Hilali-Mamouni-Y)

Soient M une variété connexe fermée orientée de dimension m et $k > 1$ un entier, et G un groupe fini agissant librement sur M. Soit $A = (A, d)$ une ADGC connexe à dualité de Poincaré quasi-isomorphe à $A_{PL}(M)$. Alors $A_{PL}(F_G(M,k))$ est quasi-isomorphe à l'ADGC $F_G(A,k)$.

Le théorème de classification en dimension cohomologique=8 avec $\chi_\pi = 0$

En 1955, James a introduit le concept du produit réduit d'espaces pointés. Si X est un espace topologique avec point de base $*$. Notons $X_{(1)} = X$, on définit le $p-$ produit réduit $X_{(p)}$ par :

$$X_{(p)} = X \times \ldots \times X / \sim$$

où $\sim$ est défini par :

$$(x_1, \ldots, x_i, *, x_{i+1}, \ldots, x_{p-1}) \sim (*, x_1, \ldots, x_{p-1}).$$

Pour tout $(p-1)-$uplet $(x_1, \ldots, x_{p-1}) \in X^{p-1}$, et pour tout $i = 1, \ldots, p-1$.

Le théorème de classification en dimension cohomologique=8 avec $\chi_\pi = 0$

Cette construction appliquée à une sphere $\mathbb{S}^n$, n est pair, fournit un espace $\mathbb{S}^n_{(p)}$ pour lequel :

$$H^*(\mathbb{S}^n_{(p)};\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}[a]/(a^{p+1})$$

pour tout corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle.
Le théorème suivant, est une suite de ce que M.R.Hilali avait entamé dans la classification des espaces 1-connexe elliptiques, il donne les possibles types d'homotopie d'un espace X ayant une cohomologie rationnelle de dim=8 avec la condition $\chi_\pi = 0$.

Le théorème de classification en dimension cohomologique=8 avec $\chi_\pi = 0$

Theorem (Hilali-Mamouni-Y)

Soit X un espace elliptique et 1-connexe, si $\dim H^*(X;\mathbb{Q}) = 8$ *et* $\chi_\pi = 0$, *alors X est formel de l'un des types suivant :*

(1) $X \sim_{\mathbb{Q}} \mathbb{S}^n_{(7)}$ *avec* $7n = fd(X)$.

(2) $X \sim_{\mathbb{Q}} \mathbb{S}^n_{(3)} \times \mathbb{S}^m$, *avec* $3n + m = fd(X)$.

(3) $X \sim_{\mathbb{Q}} \mathbb{S}^n_{(4)} \# \mathbb{S}^n_{(4)}$.

(4) $X \sim_{\mathbb{Q}} \mathbb{S}^n_{(5)} \# \mathbb{S}^m_{(3)}$.

(5) $X \sim_{\mathbb{Q}} \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^k$, *avec* $n + m + k = fd(X)$

(6) $X \sim_{\mathbb{Q}} P_{\alpha,\beta,\gamma}$, *où*

$H(P_{\alpha,\beta,\gamma};\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b,c]/(a^2 - \alpha bc, b^2 - \beta ac, c^2 - \gamma ab)$

• Question posée par *Micheline Vigué* :
Etant donnée une fibration $E \to B$ de fibre F, supposons que F et B sont elliptiques 1-connexes, et vérifient la Conjecture de Hilali, est ce que l'espace E la vérifie aussi ?
• Etudier $F_G(M,k)$ dans le cas où G est un groupe de Lie compact, nilpotent,...
• Si G et G' sont deux groupes finis tels que $G \cong G'$, que peut-on dire sur l'application $\Phi : F_G(M,k) \to F_{G'}(M,k)$?
• Etant donné une famille finie de variétés $\{M_i\}_{i\in I}$, de la même dimension telles que pour tout i, $F(M_i,k)$ admet un modèle, trouver un modèle pour $F(\#_{i\in I} M_i, k)$ en fonction de ceux des $F(M_i,k)$.

Actions des groupes de Lie compacts sur une adg, en particulier pour $A_{PL}(F_G(M,k))$.

L'étude de l'homotopie rationnelle modulo p c.àd. remplacer $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Q}_p$ où p est un nombre premier.

Nous travaillons actuellement sur un résultat concernant une généralisation d'un théorème de Gammelin sur l'algèbre de Gorenstein.

Une autre question concernant l'algèbre de Gorenstein est la suivante :

Généraliser les concepts d'algèbre de Gorenstein et d'algèbre elliptique aux modules différentiels. Appliquer à l'opération naturelle de l'homologie de l'espace des lacets de la base d'une fibration sur l'homologie de la fibre.

Evènements Mathématiques en 2016

- Mini-Ecole en Mai 2016 à Mehdia, sur **La théorie des Noeuds**
- International Summer School :

Rational Homotopy Theory and its Interactions

Période : 10 juillet 2016 au 20 juillet 2016

Lieu : Université Internationale de Rabat

Ville/Région : Rabat, Maroc

Plus plus de détails, voir Site web : http ://algtop.net/geto16/

Email : h.yamoul@gmail.com

Références

- F.Cohen and M.Xicoténcatl, On orbit configuration spaces and the rational cohomology of $F(\mathbb{RP}^n, k)$. Contemporary Mathematics no. 265 (AMS) (2000), 233-249.
- Y.Félix,S.Halperin and J.-C.Thomas *Rational Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics 205. Springer (2000).
- E.Fadell and S.Husseini, Geometry and Topology of Configuration Spaces.-Springer Monographs in Mathematics. 2001
- Y.Félix,J.Oprea, and D.Tanré *Algebraic Models in Geometry*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 17 2008.

Références

- M.R.Hilali *Action du tore $\mathbb{T}^n$sur les espaces simplement connexes*,Ph. D. Thesis, Université catholique de Louvain, Belgique (1990).
- M.R.Hilali, M.I.Mamouni *A conjectured lower bound for the cohomological dimension of elliptic spaces.*,J. Homotopy Relat. Struct. 3, 379 - 384 (2008).
- M.R.Hilali, M.I.Mamouni *A lower bound of cohomologic dimension for an elliptic space elliptic spaces.*,Topology Appl. 156, 274-283 (2008).

Références

- M.R.Hilali, M.I.Mamouni and H.Yamoul *On the Hilali Conjecture for configuration spaces of closed manifolds.*,Afr. Diaspora J. Math.(2015).
- M. R. Hilali, M. I Mamouni, and H. Yamoul, The rational homotopy type of elliptic spaces up to cohomological dimension 8. To appear in Afrika Matematika.
- M.Grant, M. R. Hilali, M. I Mamouni, and H. Yamoul, Rational Model for Orbit Configuration Spaces. In preparation.
- I.Kriz *The Rational Homotopy Type of Configuration Spaces,*Annals of Mathematics 139 (1994), 227-237.

Références

- P. Roisin, L'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle des espaces de configurations dans une variété. *PhD thesis* (2006), Université catholique de Louvain, Belgium.
- T. Sohail, Cohomology of configuration spaces of complex projective spaces. *Czechoslovak Mathematical Journal* **60** (2010), 411-422.
- B.Totaro *Configuration spaces of algebraic varieties*,Topology 35 (1996) 1057-1067.